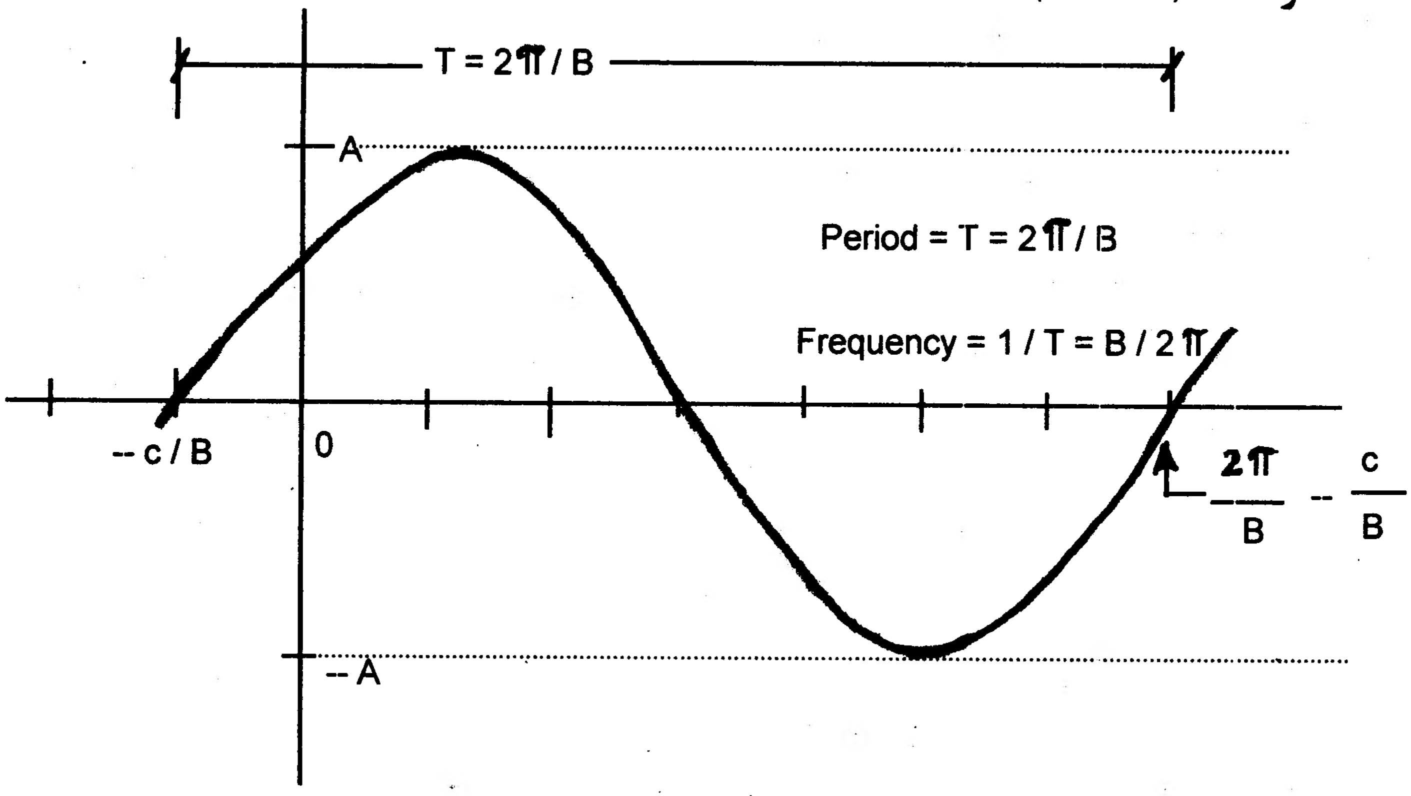
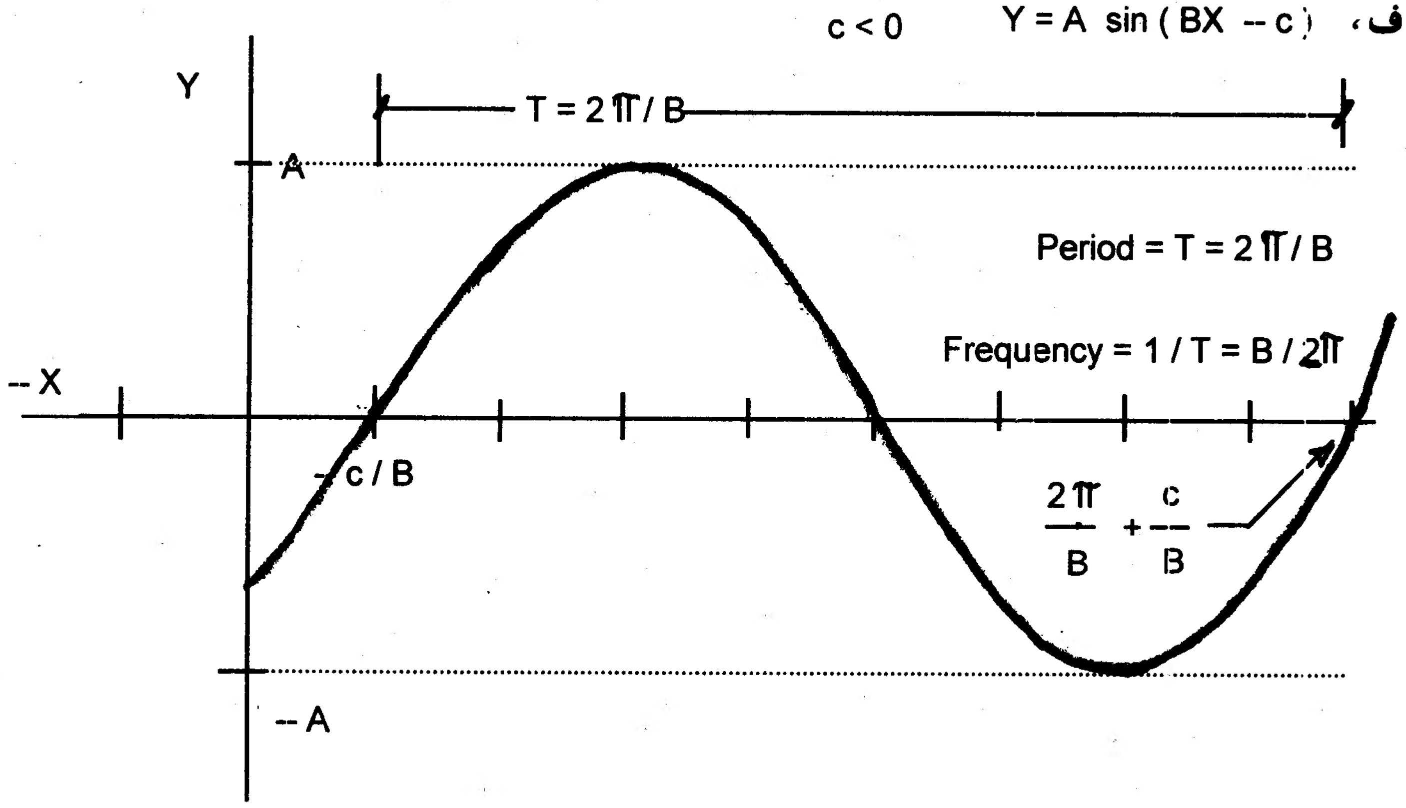
گراف ، $Y = A\sin(BX + c)$ $c > 0$



گراف ، $Y = A\sin(BX - c)$ $c < 0$



مثال دوم: گراف تابع $Y = 2\sin(3X - \pi)$ را برای قیمت حدودی $0 \le X \le \pi$ سکیچ نمأید ؟

حل: نخست ، با مطالعهٔ و مقایسهٔ تابع فوق یاداشت های ذیل را به اساس معلومات تابع نوت میگیریم ۰

$A = 2$, $B = 3$, $c = -\pi$

لهذأ ، ۱ ـــ دامنه اعظمی، Amplitude = 2 است ۰

۲ ـــ پیریود تابع ، $T = 2\pi / B = 2\pi / 3$ است ۰

۳ ـــ مقدار تناوب ، phase shift $= -c / B = -(-\pi / 3) = +\pi / 3$ است ۰

به اساس معلومات فوق الذکر ، گفته میتوانیم که گراف مطلوب به زاویهٔ $X = \pi / 3$ به طرف راست تناوب کرده ، از نقطهٔ مثبت $\pi / 3$ شروع شده و به اندازهٔ $2\pi / 3$ واحد بطرف راست قیمت X ـــ گراف دوباره تکرار میگردد ۰ چارم حصهٔ پیریود مساوی میشود به $1/4\,(2\pi / 3) = \pi / 6$ یعنی به جمع کردن هر $\pi / 6$ گراف قیمت های اعظمی خود را میگیرد ۰ بطور مثال :

۱ــ چارم حصهٔ پیریود جمع مقدار تناوب ، $\pi/2 = \pi/6 + \pi/3$ گراف اعظمی میشود ٠

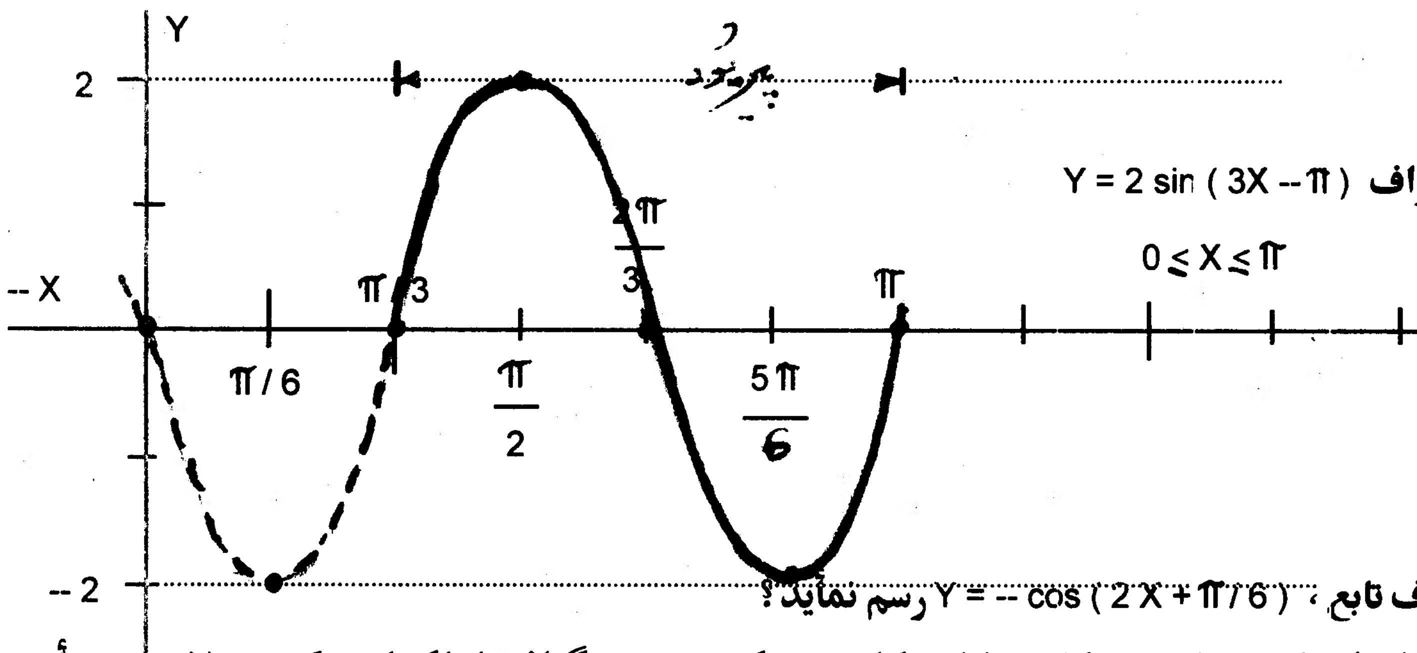
۲ــ دو چند حصهٔ چارم جمع مقدار تناوب ، $\pi/3 + 2(\pi/6) = 2\pi/3$ اعظمی میشود

۳ــ سه چند حصهٔ چارم جمع مقدار تناوب ، $\pi/3 + 3(\pi/6) = 5\pi/6$ اعظمی میشود ٠

و به همین ترتیب ادامه داده میتوانیم ---------------- جدول به آسانی تکمیل میشود ٠

با اساس معلومات فوق الذکر ، جدول وگراف را در ذیل به دقت مطالعه فرمأید ٠ اگر ما گراف را بطرف چپ ادامه بدیهیم ، چون پیریودمساوی است به $2\pi/3$ ، لهذا : گراف موصوف از مبدأ محور های X و Y نیز عبور میکند ٠

X	0	π / 6	π / 3	π / 2	2π / 3	5π / 6	π
Y	0	-- 2	0	2	0	-- 2	0



گراف $Y = 2\sin(3X - \pi)$

$0 \le X \le \pi$

مثا ل سوم : گراف تابع ، $Y = -\cos(2X + \pi/6)$ رسم نمأید ؟

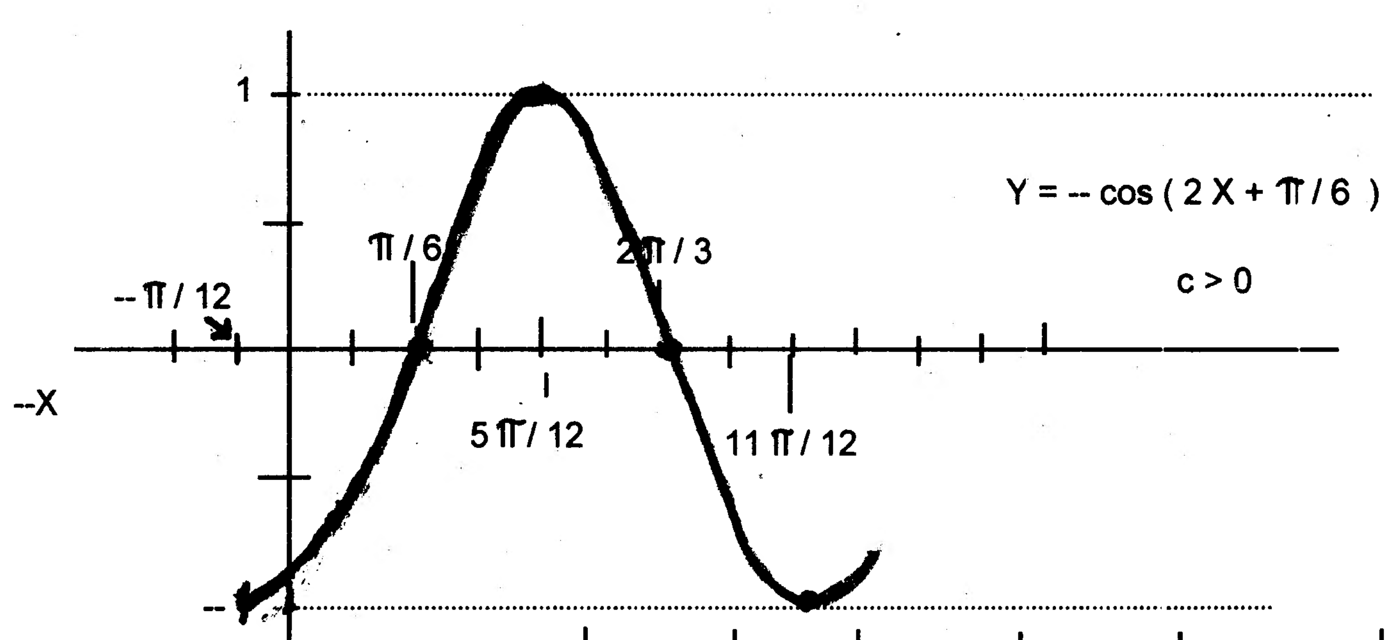
حل : نخست از اخذ معلومت تابع به شکل تحلیلی نکات مهم که در ترسیم گراف با ما کمك میکند ، خلا صه مینمأیم :

۱ــــ دامنه اعظمی ، یا Amplitude = -- 1 است ٠ (-- 1)

۲ــــ پیریود گراف ، یا $T = 2\pi / B = 2\pi/2 = \pi$ است ٠ (π)

۳ــــ مقدار تناوب ، یا phase shift $= -c/B = (-\pi/6)/(2) = -\pi/12$ .... $\frac{-\pi}{12}$

چون $c > 0$ است ، لذأ گراف تابع بطرف چپ به اندازهٔ $-\pi/12$ واحد تناوب یا شیفت میکند ٠



گراف تابع : $Y = -\cos(2X + \pi/6)$

$c > 0$

X	-- π / 12	π / 6	5π / 12	2π / 3	11π / 12
Y	-- 1	0	1	0	-- 1

مثال چارم : گراف تابع $Y = 2\cos(X/2 - \pi/6)$ را سکیچ نمأید ؟

حل : نخست از شکل معادلهٔ تابع معلومات ذیل را خلاصه مینمأیم :

$A = 2$, $B = 1/2$, $c = -\pi/6$, $T = 2\pi/B = 4\pi$

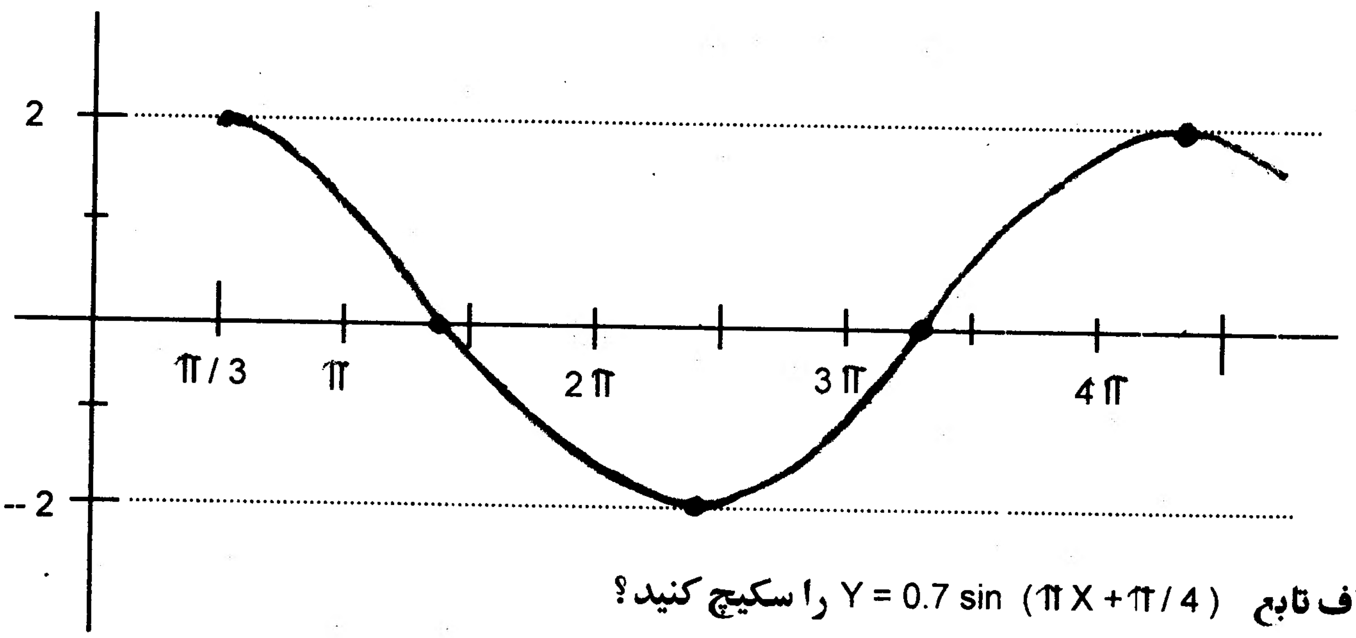
و همچنان ، تناوب ، phase shift این گراف را پیدا میکنیم : $\text{Phase shift} = -c/B = -(-\pi/6)/(1/2) = \pi/3$

است مطابق تحلیلها و معلو مات ، حال میتوانیم به آسانی جدول را ترتیب داده ،گراف مطلوب را سکیچ نمائیم ٠

قابل یادآوری است که ؛ اگر ضریب X یا قیمت B کمتر از 1 قیمت بگیرد درآنصورت پیریو د گراف از 2π بزرگتر میباشد ٠

جدول ترتیب شده ----

X	$\pi/3$	$4\pi/3$	$7\pi/3$	$10\pi/3$	$13\pi/3$
Y	2	0	-2	0	2



مثا ل چا رم : گراف تابع $Y = 0.7\sin(\pi X + \pi/4)$ را سکیچ کنید ؟

حل : معلومات تابع را خلاصه میسازیم :

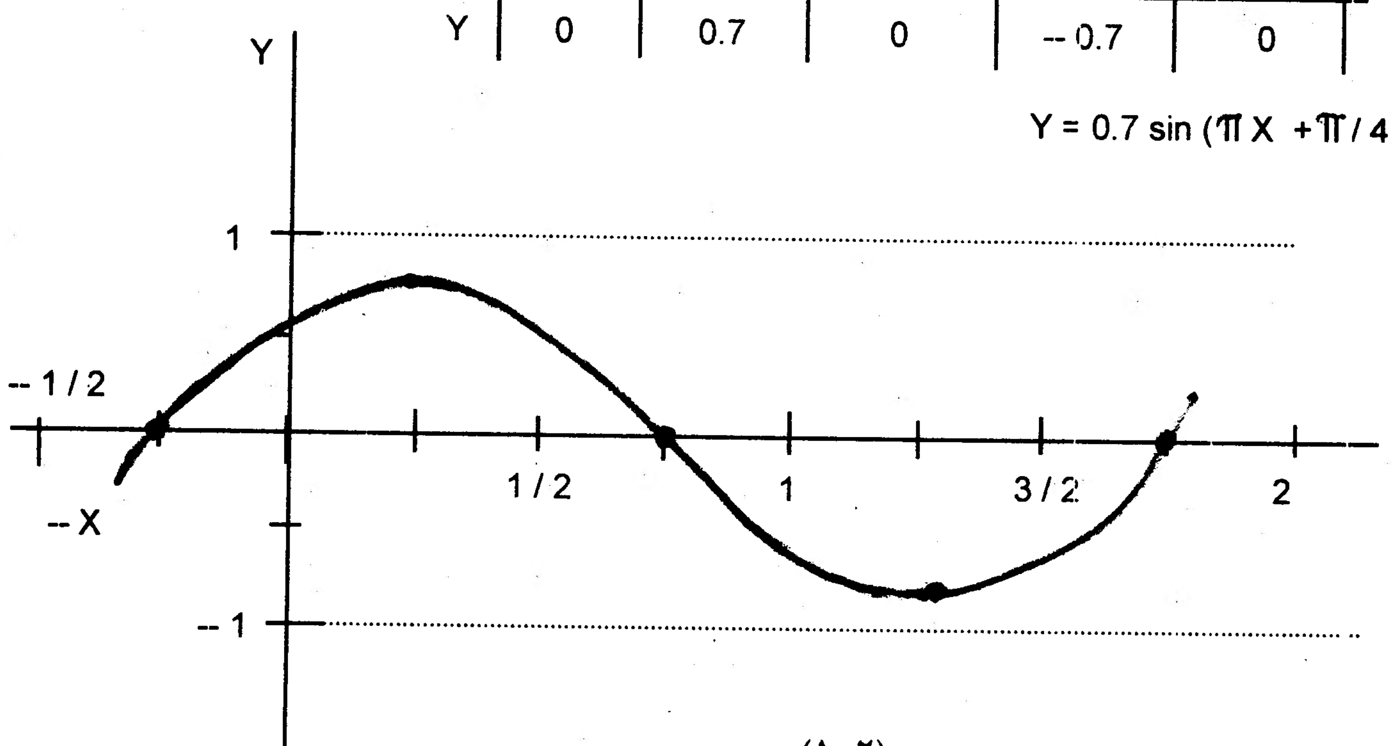
$A = 0.7$, $c = \pi/4$, $B = \pi$, $T = 2\pi/B = 2\pi/\pi = 2$

تناوب گراف ، یا $\text{Phase shift} = -c/B = -(\pi/4)/(\pi) = 4$ ٠

چون در معادلهٔ تابع ، قیمت تناوب را عددی پیدا کردیم ، لهذا : برای X قیمت های اعشاری تخمین مینمأیم ٠

X	$-1/4$	$1/4$	$3/4$	$5/4$	$7/4$
Y	0	0.7	0	-0.7	0

گراف تابع : $Y = 0.7\sin(\pi X + \pi/4)$



﴾ تمرین عمومی فصل چارم ﴿

از تمرین (۱ الی ۲٤) ، برای هر تابع : دامنهٔ اعظمی (A) ، پیریود (T) و تنا وب (displacemrnt) را دریافت کرده، بعداً هر تابع را سکیچ نمأبد :

1. $Y = \sin(X - \pi/6)$
2. $Y = 3\sin(X + \pi/4)$
3. $Y = \cos(X + \pi/6)$
4. $Y = 2\cos(X - \pi/8)$
5. $Y = 2\sin(2X + \pi/2)$
6. $Y = -\sin(3X - \pi/2)$
7. $Y = -\cos(2X - \pi)$
8. $Y = 43\cos(3X - \pi/2)$
9. $Y = 1/2\sin(1/2X - \pi/4)$
10. $Y = 2\sin(1/4X + \pi/2)$
11. $Y = 3\cos(1/3X + \pi/3)$
12. $Y = 1/3\cos(1/2X - \pi/8)$
13. $Y = \sin(\pi X + \pi/8)$
14. $Y = -2\sin(2\pi X - \pi)$
15. $Y = 3/4\cos(4\pi X - \pi/5)$
16. $Y = 6\cos(3\pi X + \pi/2)$
17. $Y = -0.6\sin(2\pi X - 1)$
18. $Y = 1.8\sin(\pi X + 1/3)$
19. $Y = 4\cos(3\pi X + 2)$
20. $Y = 3\cos(6\pi X - 1)$
21. $Y = \sin(\pi X - \pi)$
22. $Y = -1/2\sin(2X - 1/4)$
23. $Y = -3/2\cos(\pi X + \pi/6)$
24. $Y = \pi\cos(1/\pi X + 1/3)$

از تمرین ۲۵ الی ۲۸ ، گرا فهای مناسب را رسم نمأید ؟

۲۵ ــــ حرکت یك موج در یك تار ، به معادلهٔ ذیل ارأیه میشود ؟

معادلهٔ موج .... $Y = A\sin(t/T - X/\lambda)$

که دراین معادله ، A دامنهٔ اعظمی است ، t وقت است که موج حرکت کرده ، X فاصله است از مبدأ ، T پیریود : زمان است که موج دربر گرفته است ۰ و λ طول موج است ـ لمدا λ حرف یونانی است ۰

گراف سه سایکل موج را رسم کنید که:

T = 0.1 sec , = 20 cm, X = 5 cm , A = 2 cm

۲٦ ــــ نمای قطع شدهٔ یك موج آب به فورمول ذیل ارأیه میگردد ۰ که درین معدله X و Y به واحد فت اندازه میشوند ۰ گراف این موج را از قرار Y درمقابل X برای دو سایکل سکیچ کنید ؟

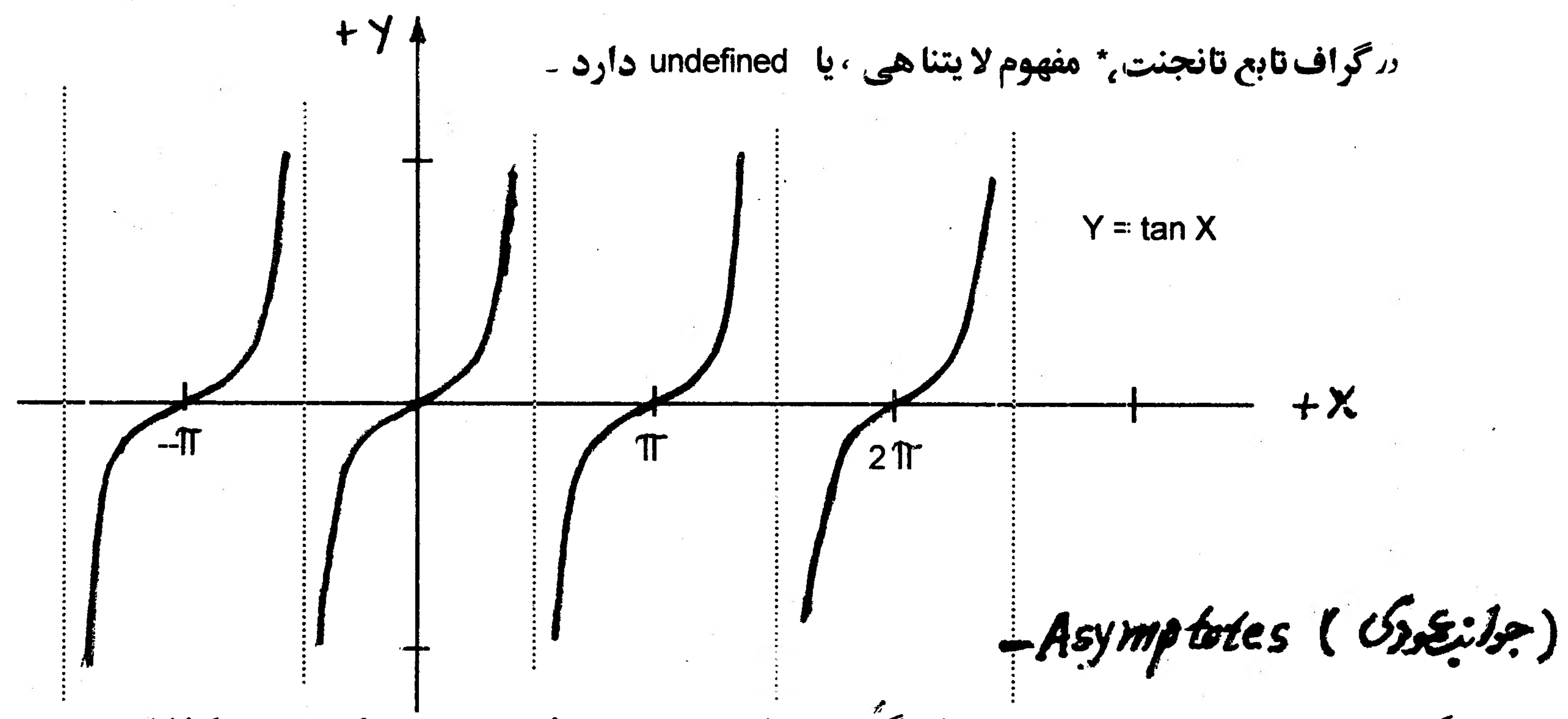
معادلهٔ موج در آب .... $Y = 0.5\sin(\pi/2X + \pi/4)$

گراف های : Y = Tan X   Y = Cot X   Y = Sec X   Y = Csc X

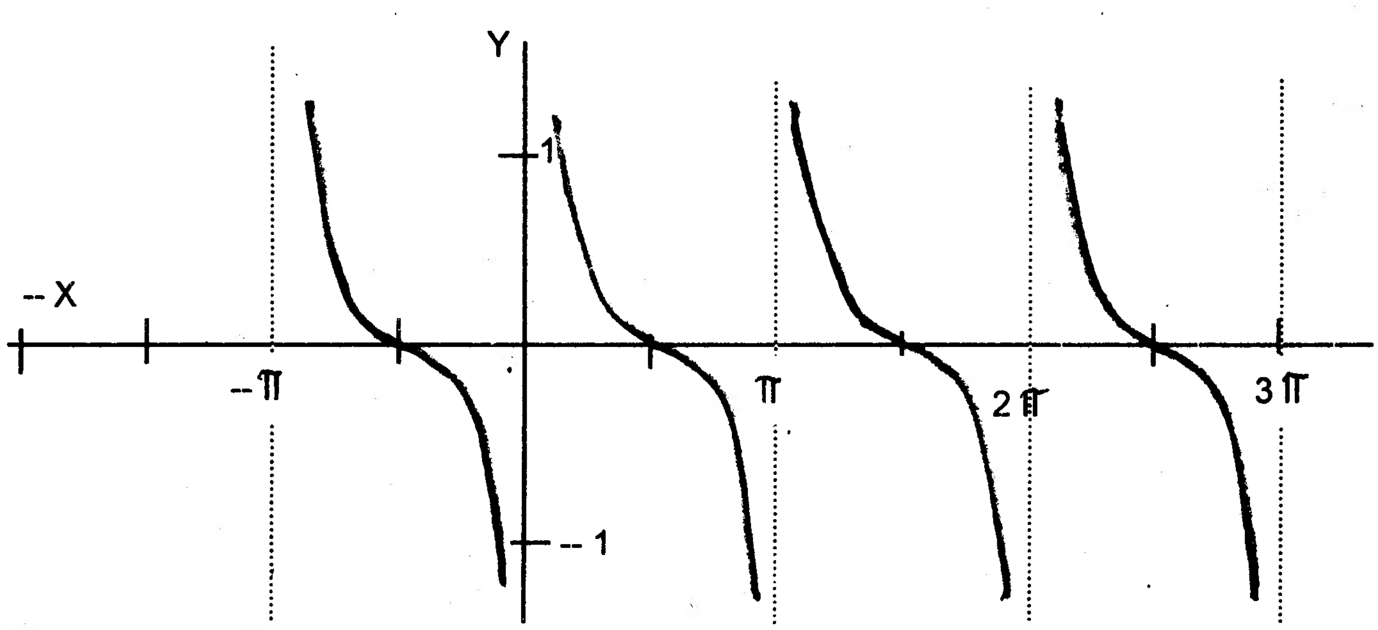
درین بخش مطالعهٔ خویش ، ما میخواهیم گرافهای توابع متباقی مثلثات را بطوری خلاصه تحت بحث قرار بدیهیم ۰ این ضروری است که نخست شکل سادهٔ هر گراف را ترسیم کرده ، که بعداً در روشنی آن ما توانسته باشیم تا گراف های دیگر توابع را سکیچ کرده بتوانیم ۰ بادر نظرداشت مطالعهٔ گراف های توابع مثلثاتی قبلی ، درینجا میخواهیم گراف تابع : Y = tan X را رسم نمایم : یك تفاوت بسیار عمده درینجا که قابل یادآوری است آن انکه ، پیریود گراف تانجنت عبارت از π است که این حالت از پیریود ساین و کوساین متفاوت میباشد ۰ نخست جدول را ترتیب میدیهیم،

X	0	π/6	π/3	π/2	2π/3	5π/6	π	7π/6	4π/3	3π/2	5π/3	11π/3	2π
Y	0	0.6	1.7	*	-- 1.7	-- 0.6	0	0.6	1.7	*	-- 1.7	-- 0.6	0

درگراف تابع تانجنت،* مفهوم لا یتنا هی ، یا undefined دارد ـ



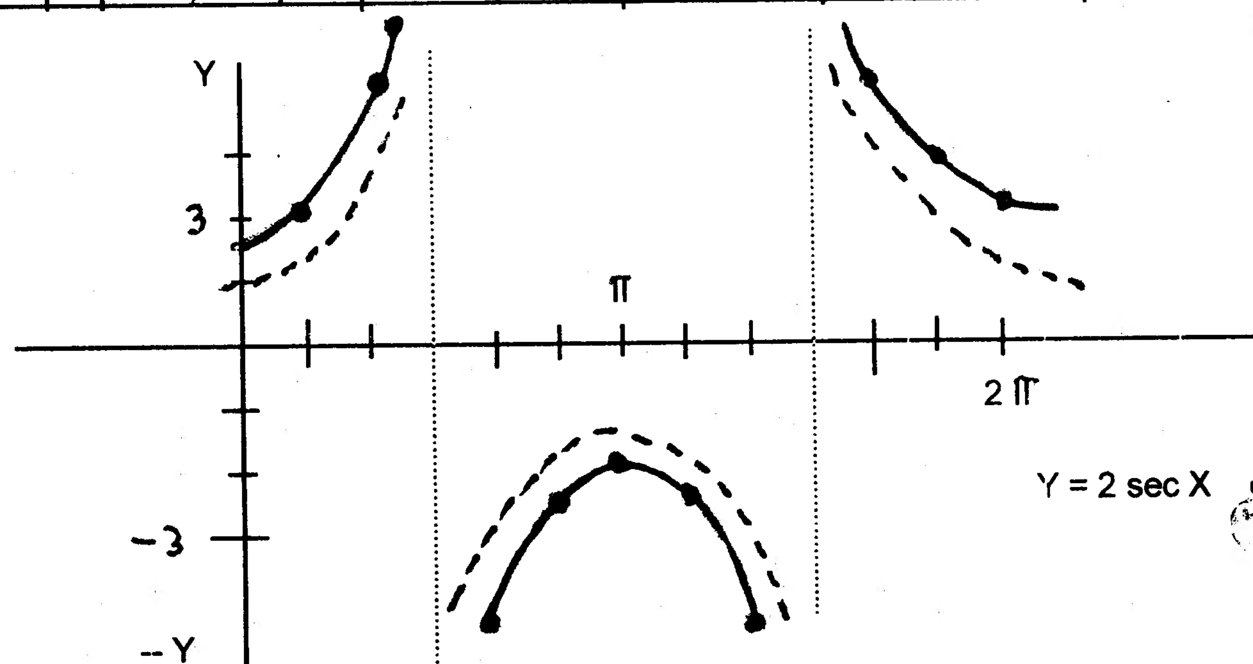
در جدول وگراف فوق ، بوضاحت مشاهده میشود که گراف در قیمت های X = π / 2 و X = 3π / 2 وکذالك ــــ تقرب میکند به لا یتنا هی (تعریف شده نمیتواند) ۰ همچنان از جدول فوق مشا هده میشود که قیمت tan X هنگامیکه قیمت X به π / 2 تقرب میکند ، بسیار زیاد میشود ۰ از جدول فوق نتیجه میگیریم که برای قیمت X = π / 2 درگراف هیچ نقطه موجود نمیباشد ۰ باید یاداشت نمأیم که پیریود منحنی tang عبارت از π است ۰که این حالت از پیریود ساین و کوساین بسیار متفاوت میباشد ۰ با تعقیب کردن طرزا لعمل فوق ، ما میتوانیم که جداول را برای سائر توابع مثلثاتی نیز ترتیب نمأیم ۰ در اشکال ذیل متباقی توابع رسم شده اند ۰ در شکل ذیل گراف تابع cot X نشان داده شده است ۰ خطوط : نقطه ـ نقطه در گراف بنام جوانب عمودی : یا Asymptotes یاد میشوند ۰ درین گرافها موضوع دامنه نیست ۰



مثال اول : گراف Y = 2 sec X را سکیچ کنید؟ حل : نخست ما تابع Y1 = sec X را سکیچ مینمأیم ٠ بعداً قیمت های Y1 را به 2 ضرب مینمأیم که به همین ترتیب منحنی مطلوب بدست آورده میتوانیم ٠ از طرف دیگر میدانیم که sec X = 1 / cos X ، لهذا : در مرحلهٔ اول جدول را به اساس تابع cos X ترتیب میدیهیم :

Y = 2 sec X

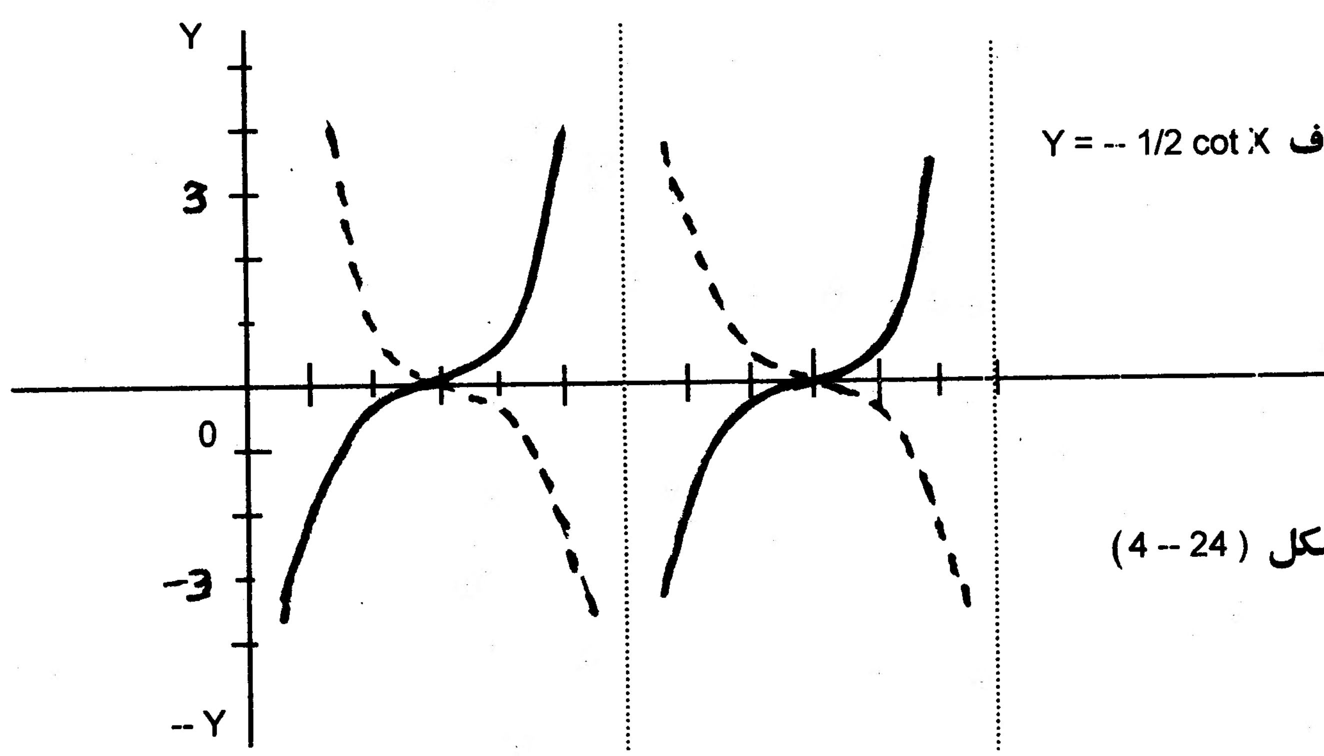
X	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	π	$7\pi/6$	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$5\pi/3$	$11\pi/6$	2π
cos X	1	0.9	0.5	0	-- 0.5	-- 0.9	-- 1	--0.9	-- 0.5	0	0.5	0.9	1
sec X	1	1.2	2	*	-- 2	-- 1.2	--1	--1.2	--2	*	2	1.2	1
Y	2	2.4	4	*	- 4	--2.4	--2	--2.4	--4	*	4	2.4	2



گراف Y = 2 sec X

مثال دوم : گراف تابع Y = -- 1/2 cot X را سکیچ نمأید؟

حل : ما نخست گراف Y = cot X را سکیچ مینمأیم که در شکل (24-4) به خط باریك نشان داده شده است ٠حال هر تابع Y ضرب عدد (1/2 --) مینمأیم ٠ تأثیر علامهٔ منفی باعث میشود که منحنی جدید متبا دل گراف اولی میشود٠ نتیجهٔ این منحنی در شکل (24 -- 4) به خط تیره تشریح گردیده است :



گراف Y = -- 1/2 cot X

شکل (24 -- 4)

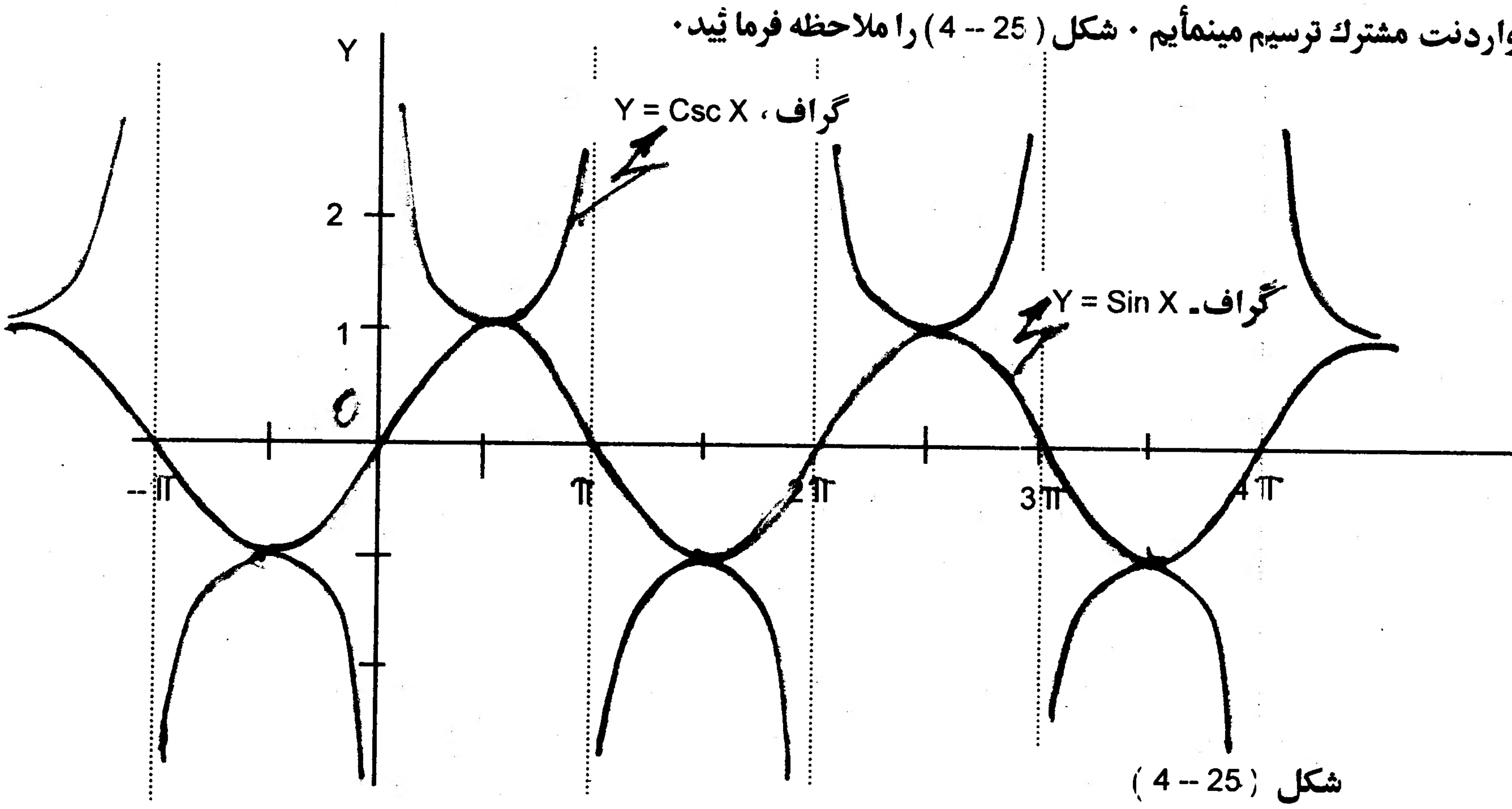
در مورد سکیچ کردن گراف های توابع مانند : Y = csc X , Y = Sec X , Y = Cot X ، با در نظر داشتن روابط ذیل ، ما میتوانیم که به آسانی گراف های توابع فوق الذکر را سکیچ نمأ یم :

$$\text{Csc } X = \frac{1}{\text{Sin } X} \qquad \text{Sec } X = \frac{1}{\text{Cos } X} \qquad \text{Cot } X = \frac{1}{\text{Tan } X}$$

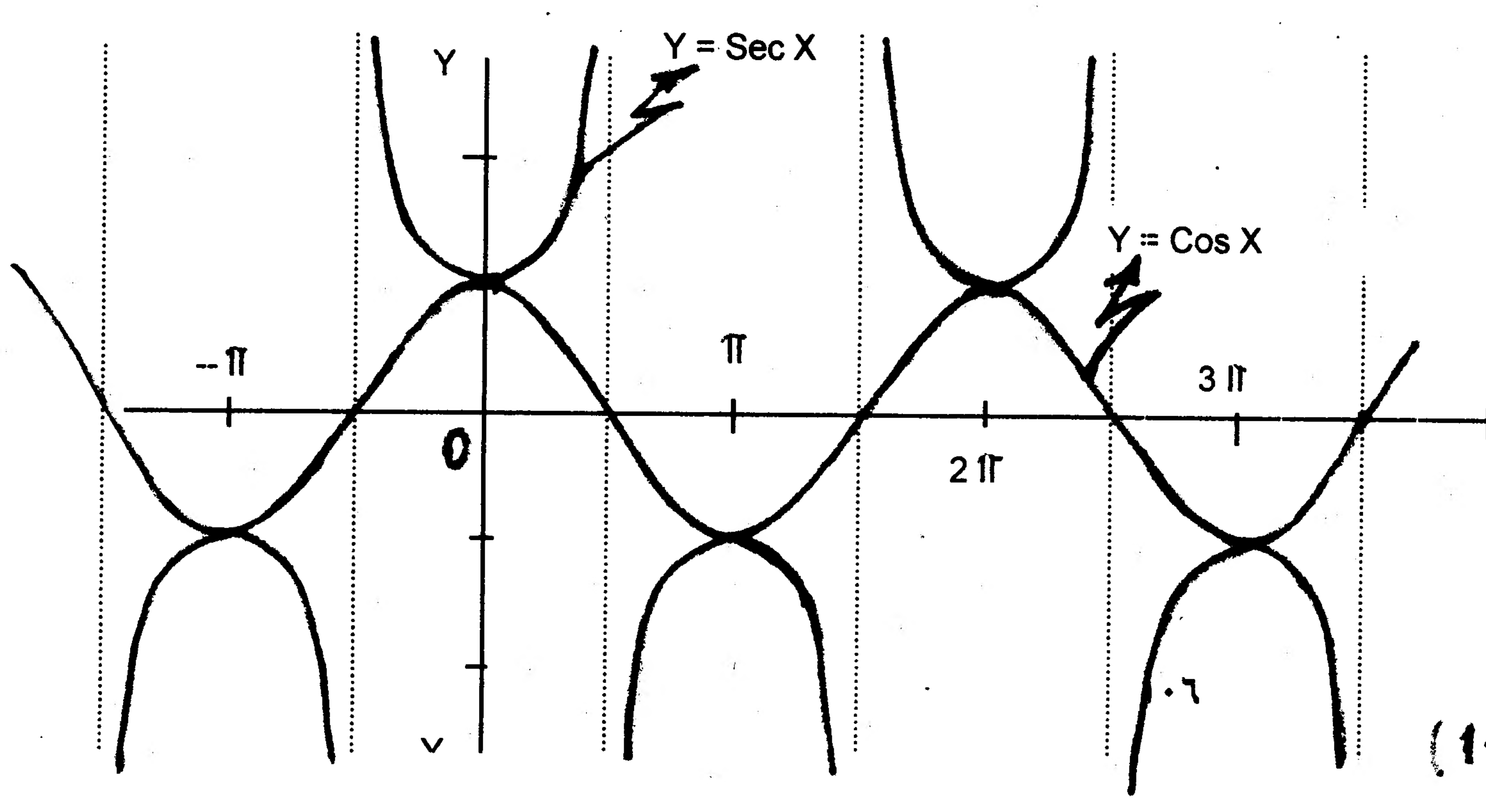
هنگامیکه بخواهیم گراف های : Y = Csc X , Y = Sec X , Y = Cot X را سکیچ نمأیم ـ نخست ، توابع معکوس آنها را مانند : Y = Sin X , Y = Cos X , Y = Tan X را از طریق ساختن جداول آنها سکیچ مینمأیم و بعداً از روابط معکوس آنها قیمت های جداول توابع معکوس مطلوب راانکشاف میدیهیم ٠

مثال سوم : گراف Y = Csc X را سکیچ نمأید ؟

حل : د رشکل (25 -- 4) ، ما نظر به تجربهٔ دروس قبلی ، گراف Y = Sin X از طریق انکشاف جدول آن سکیچ مینمایم ٠ نظر به داشتن ارتباط معکوس هر دو تابع ، اگر Sin X قیمت اعظمی (1) اتخاذ بکند ، میدانیم که قیمت Csc X نیز (1) میشود٠ زیرا 1/1 مساوی به (1) میگردد ٠ از طرف دیگر ، اگر Sin X مساوی به صفر گردد ـ در آنصورت قیمت Csc X لا یتنا هی میشود٠ همچنان هنگامیکه ، Sin X قیمت 0.5 میگیرد ، قیمت Csc X مساوی به (2) میشود٠ یا به عبارهٔ دیگر ـ وقتیکه قیمت Sin X خوردتر شدہ میرود ، به همان منوال قیمت Csc X بزرگتر شدہ میرود٠ بخاطر داشته باشید که هر دو تابع عین علامه داشته میباشند٠ با داشتن تحلیلات فوق ، ومعلوما ت تفصیلی فوق الذکر ، گراف Y = Csc X وگراف Y = Sin X را در یك کواردنت مشترك ترسیم مینمأیم ٠ شکل (25 -- 4) را ملاحظه فرما ئید٠



شکل (25 -- 4)



تمرین های : Y = a Sin X و Y = a Cos X :

۱ : از تمرین (۱ الی ٤) ، جدول تحولات Y و X را برای توابع مثلاتی ذیل تکمیل نمأید و بعداً گراف های مربوطه آنرارسم کنید ؟

X	$-\pi$	$-3\pi/4$	$-\pi/2$	0	$\pi/4$	$3\pi/3$	$7\pi/4$	2π	$9\pi/4$	$5\pi/2$	$11\pi/4$
Y											

1. Y = Sin X , 2. Y = Cos X , 3. Y = 3 Cos X 4. Y = – 4 Sin X

۲ : از تمرین (۵ الی ۲۰) گراف های توابع ذیل را رسم کنید؟

5. Y = 3 Sin X , 6. Y = 5 Sin X , 7. Y = 5/2 Sin X 8. Y = 0.5 Sin X

9. Y = 2 Cos X , 10. Y = 3 Cos X 11. Y = 0.8 Cos X 12. Y = 3/2 Cos X

13. Y = – Sin X , 14. Y = – 3 Sin X 15. Y = – 1.5 Sin X 16. Y = –0.2 Sin X

17. Y = – Cos X 18. Y = – 8 Cos X 19. Y – 2.5 Cos X 20. Y = – 0.4 Cos X

۳ : از تمرین (۲۱ الی ۲٤) ، گراف های توابع را در صورتی رسم کنید که برای X قیمت های (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) وضع شود و همچنان واحد زاویه، (X) به ریدین باشد ؟

21. Y = Sin X , 22. Y = 3 Sin X , 23. Y = Cos X 24. Y = 2 Sin X

٤ : از تمرین (۱ الی ٤) ، برای توابع مثلثاتی داده شده ، جدول ذیل را تکمیل نمأید ؛

X	$-\pi/2$	$-\pi/3$	$-\pi/4$	$-\pi/6$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$3\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
Y													

1. Y = tan X , 2. Y = Cot X , 3. Y = Sec X , 4. Y = Csc X

۵ : از تمرین (۵ الی ۱۲) ، گراف های توابع ذیل را در صورتی رسم کنید که جدول فوق الذکر برای هر کدام آن تکمیل گردد ؟

5. Y = 2 Tan X , 6. Y = 3 Cot X , 7. Y = 1/2 Sec X , 8. Y = 3/2 Csc X

9. Y = –2 Cot X , 10. Y = – Tan X , 11. Y = – 3 Csc X , 12. Y = – 1/2 Sec X

٦ : از تمرین (۱۳ الی ۲۰) ، گراف های توابع ذیل را رسم کنید ؟ در صورتیکه : $0 \leq X \leq \pi$ باشد

13. Y = tan 2X , 14. Y = 2 Cot 3X , 15. Y = 1/2 Sec 3X 16. Y = Csc 2X

17 Y = 2 Cot (2X + π/6) 18. Y Tan (3X – π/2) 19. Y = Csc (3X – π/3)

20. Y = 3 Sec (2 X + π/4)

۷ : از تمرین (۲۱ الی ۲۴) ، گراف های توابع را از طریق توابع معکوس مربوط آنها رسم کنید ؟

21. $Y = \operatorname{Sec} X$, 22. $Y = \operatorname{Cot} X$, 23. $Y = \operatorname{Csc} 2X$, 24. $Y = \operatorname{Sec} \pi X$

۲۵ : در لخشیدن یك جسم بالای سطح مایل (مستوی مایل) ، با سرعت ثابت ، ضریب ا ستکاك (U) بین جسم وسطح مایل (مستوی مایل) به رابطهٔ ذیل نشان داده میشود · $u = \tan \theta$ که درین رابطه θ عبارت از زاویه بین سطح مایل و خط افقی است · بعداً گراف تابع فوق را (محدود $0 \le \theta \le 60^\circ$ ، رسم نمائید؟

۲۶ : قوهٔ کشش (T) ، در هر نقطهٔ یك کیبل که بار تقسیم شدهٔ را می بردارد و به رابطهٔ ذیل نشان داده شده است :
$T = T_o \operatorname{Sec} \theta$ ، که درین رابطه (T_o) ، عبارت از قوه کشش در کیبل میباشد · و این کیبل اکثراً حالت افقی داشته که زاویه بین سطح زمین و کیبل به θ ارائه گردیده است · شما گراف رابطهٔ را در صورت دریافت کنید که قیمت $T_o = 200$ lb میباشد · گراف T را در مقابل θ رسم کنید ·

۲۷ : یك تعمیر 200 متر ارتفاع دارد ، و از تهداب این تعمیر به فاصلهٔ X متر ، زاویهٔ ایلیویشن (Angle of elevetion) نظر به بام تعمیر از رابطهٔ ذیل دریافت میگردد: $X = 200 \operatorname{Cot} \theta$ ، گراف X را در مقابل زاویهٔ θ رسم کنید ؟

۲۸ : یك افادهٔ الجبری که سرعت اولی یك مزایل را به زاویهٔ θ بین افق و مسیر حرکت مرمی چنین نشان میدهد:
$V_o = gt \operatorname{Csc} \theta$ ، که درین رابطه g ، تعجیل قوهٔ جاذبه زمین بوده ومساوی به $g = 32\ ft / sec^2$ میباشد و وقت حرکت $t = 10$ sec است · گراف V_o را در مقابل θ سکیچ کنید ؟

تطبیقات گراف ها (منحنی ها) مثلثاتی در علم فزیك :

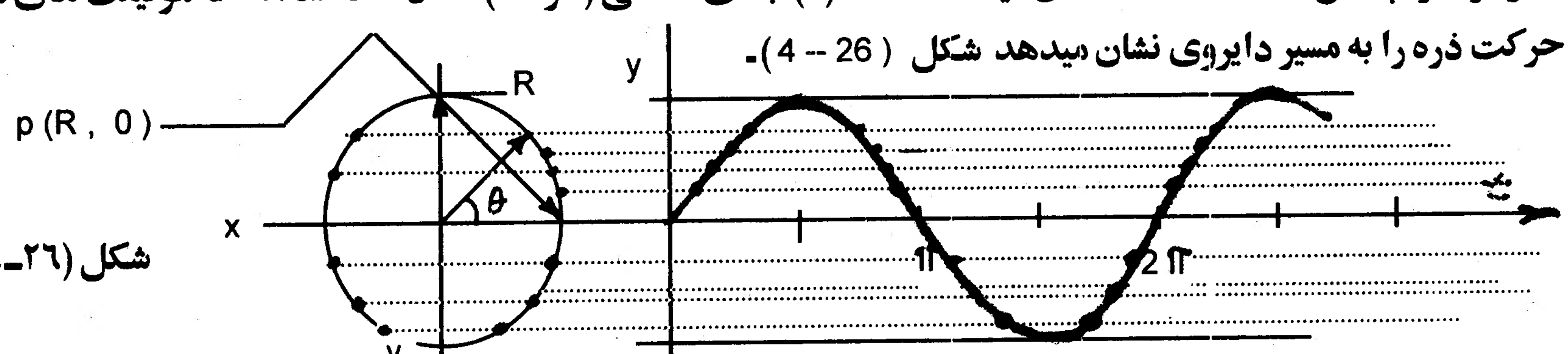
تطبیقات عملی و بکار برد مباحث توابع مثلثاتی و با الخصوص گرافهای آن، اساسات عملی ساینس و تیکنالوژی را بنیان گذاری مینمایند · برخی از تطبیقات گرافهای مثلثاتی در دروس گذشته تشخیص گردید ، اما درین بخش میخواهیم مفاهیم بسیار مهم فزیکی و تطبیقات تخنیکی آنهارا تشخیص ، رهنمایئ و عملی نمائیم · در دروس گذشته ، ما در مورد یك جسم که به مسیر دایروی حرکت میکرد ، بحث مختصر نمودیم · یك موضوع بسیار مهم که برای اعم (عوام) در علم فزیك بسیار مهم میباشد. آن عبارت از حرکت سادهٔ هارمونیك میباشد که ما میخواهیم آنرا درینجا تحت مطالعهٔ دقیق قرار بدهیم ·

ترسیم حرکتئ مرتسم (Projection) ، از یك ذرهٔ که بالای یك دایرهٔ دارای قطر d چرخانیده میشود ، به عنوان اصطلاحی فزیك عبارت از حرکت هارمونیك ساده میباشد · یا Simple Hormonic Motion ·

بطور مثال : مترسم حرکتیئ سایهٔ یك جسم که بر مسیر یك دایره در حرکت میباشد · مثال دیگری درین مورد ، عبارت از ترسیم حرکتی انجام نهائی سیم چیین بایسیکل که هنگام چرخش در حالت افقی ویا عمودی موقیعت داشته باشد ·

مثا اول : شکل (26 -- 4) را تحت مطالعه قرار میدیهیم · فرض میکنیم که حرکت یك ذره بر مسیر دایروئ از انجام شعاع در نقطهٔ (R , 0) بالای محیط دایره شروع میشود · همچنان. در نظر میگیریم ذرهٔ موصوف به یك سرعت ثابت زاویوئ w به مسیر دایروی حرکت میکند· طول مرتسم شعاع دایره بالای محور Y در هر لحظه عبارت از طول d میباشد که میتوان مفهوم و قیمت d در هر لحظه به این معادله ارایه نمائیم : $d = R \operatorname{Sin} \theta$ ـ که در یك حالت خاص $d_{max.} = R$ میشود·

در این معادله ، R طول شعاع دایره است · در شکل ذیل ملاحظه میشود که طول این مرتسم (پراجکشن) نقاط نهائی شعاع دایره را در چندین حالات مختلف نشان میدهد· نقاط (·) بالای منحنی (گراف) معا دلهٔ $d = R \sin \theta$ موقیعت های مختلف حرکت ذره را به مسیر دایروی نشان میدهد شکل (26 -- 4)-



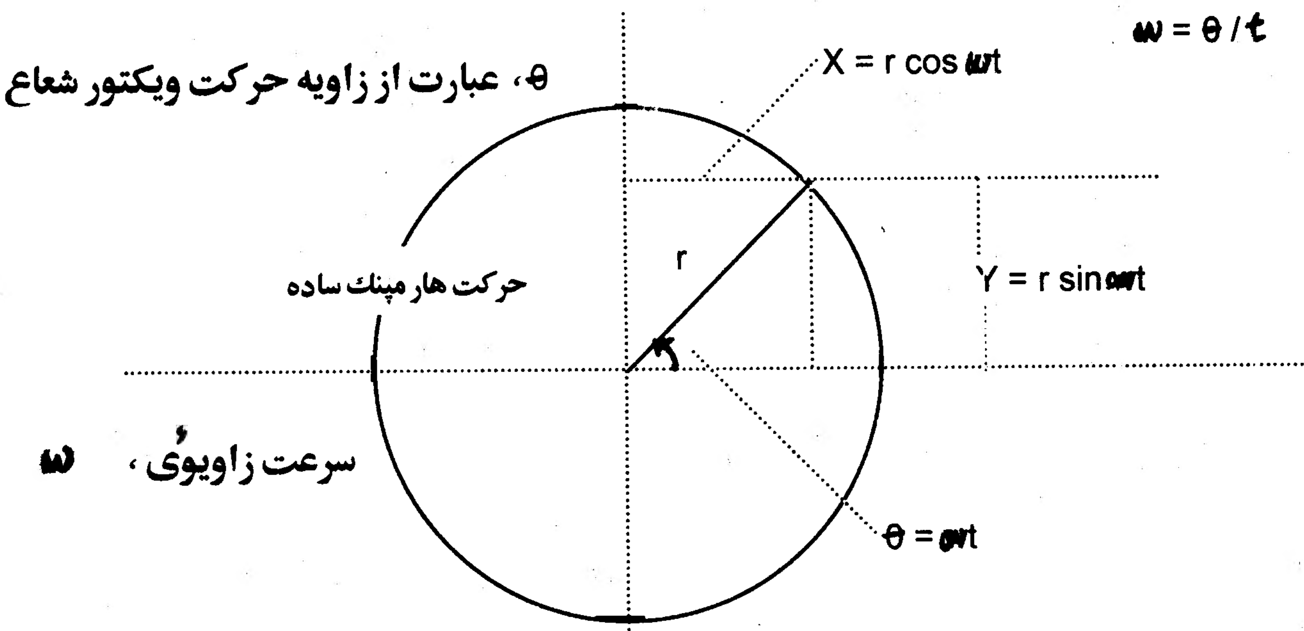
شکل (۲۶ـ٤)

حرکت هارمونیك ، Harmonic Motion :

هر گاه شما بالای یك تخته بالای سطح آب استاده موجئ شنأ کنید ، همین حرکات بالا و پأین شدن جسم شما بالای سطح آب یك موج هارمونیك است که در حقیقت یك گراف تابع مثلثاتی : $y = a \sin X$ است ٠

حرکت هارمونیك ساده ، simple harmonic motion :

حرکت ساده هارمونیك ، عبارت از مرتسم حرکت انجام یك ویکتور شعاع یك دایره بالای محور Y بوده درصورت که شعاع این دایر ه به یك سرعت زاویوئ ثابت دوران بکند ٠ شکل ذیل را ملاحظه فرمائید :



معا دلهٔ هارمونیك ، عبارت است از : $Y = r \sin \omega t$ است ٠

اگر $t = 0$ باشد ، درآنصورت $\omega t = 0$ میشود و هم $Y = 0$ است ، شروع حرکت ویکتور است ٠

و اگر $t = 2\pi/w$ ، درآنصورت $\omega t = 2\pi$ میشود ، که عبارت از وقت تکمیل شدن یك سایکل گراف است

ولهذا $2\pi/\omega$ ، عبارت از پیریود ، T است ٠ و میدانیم که : $T = 1 / \text{Frequency}$, $T = 1 / f$

گراف های عمومی هارمونیك یا سینوسایدل (sinosoidal) ، عموماً از نقطهٔ نظر مثلثات ، به اشکال ذیل ارائیه میگردند :

$$Y = a \sin (bX + \theta) \quad , \quad \text{or} \quad Y = a \cos (bX + \theta)$$

که درین دو معادله ، تعریفات قبلی ـ یك باری دیگر تکرار میشوند :

دامنهٔ گراف ، a = amplitude

وقت یك سایکل موج ، $\text{Period} = T = 2\pi / b$

زاویهٔ فاز ، θ = phase angle = θ

اهتزاز موج دریك سایکل، فریکونس $\text{frequency} , f = b / 2\pi$

دوری گراف یا موج از محور Y ـ curve shift = $X = -\theta / b$

گرافهای ، توابع $\sin \theta$ و $\cos \theta$ عموماً در موضوعات برق بسیار زیاد تطبیق میشوند ، بطوری مثال : جریان برق متناوب (AC Current) ، وقتی تولید میشود که یك کوایل (سیم پیچ) در یك ساحهٔ مقناطسی طوری دوران بکند که خطوط قوأ ساحهٔ مقناطسی را قطع نمایند ٠ بطور مثال : معادلهٔ جریان متناوب لحظوئ یك حالت هارمونیك ساده را تمثیل میکند وچنین ارائه میگردد : ——— $i = I_{max} \sin \omega t$ چون $2\pi f = \omega$ میشود ، لهذا شکل اساسی آن ، $i = I_{max} \sin 2\pi f t$

و همچنان معادلهٔ ولتاژ متناوب عبارت است از : $v = E_{max} \sin 2\pi ft$ ٠ در اکثریهٔ سرکت های برقی شامل کوایل و کاندنسرها جریان برقی با ولتاژ برقی به یك مقدار زاویهٔ فاز از هم دیگر دور میباشند، وبین ولتاژ و جریان یك زاویهٔ فاز موجود میباشد٠

عین عملیه در مورد عدد (4.49) اجرأ میکنیم ۰ در اخیر دکمهٔ ($\sqrt{X}$) را فشار میدیهیم که عدد مطلوب(8.545) بدست می آید ۰ عدد (8.545) را ذریعهٔ دکمهٔ (MR +) ← دکمهٔ حافظه ، به حفظ کلکولیتر میسپاریم ۰

حال ، اگر دکمهٔ (MR) ← را فشار بدیهیم ، قیمت (r) که (8.545) میبا شد دوبا ر ه بدست می آید ۰

سوال : میخواهیم زاوئِه را پیدا کنیم که ($\sin\theta = 4.49 / 8.545$) باشد ۰ برای آنکه زاوئِه مطلوب را دریافت نمایم، عملیهٔ ذیل را اجرأ مینما یم :

عملیهٔ کلکولیتر : ۰۰ (4.49) ÷ (MR) 0.525 INV sin 31.6

نخست عدد(4.49) را در کلکولیتر ثبت نموده ، بعدأ دکمهٔ تقسیم را فشار میدیهیم ، سپس دکمهٔ (MR) را فشار میدیهیم تا عددی حفظ شده دوباره ظا هر گردد۔ عدد (0.525) که عبارت از خارج قسمت کسر است ، با لا ی شیشهٔ کلکولیتر ظاهر میگردد۰ وقتیکه عدد مطلوب خوانده شد ، در آن صورت دکمهٔ (INV) را فشار میدیهید ۰ در ا خیر ، دکمهٔ (sin) را فشار میدیهید که نتجه مطلوب به دست می آید که آن عبارت است از : زاویهٔ (31.6°) میبا شد ۰ بخاطر داشته باشید که (Mode) کلکولیتر به واحد دلخوا تان که در اینجاه درجه (DEG) است قبلاً ، اعیار بوده باشد ۰

اگر خواسته باشیم توابع مثلثاتی(...... $\tan\theta$, $\cos\theta$, $\sin\theta$) زریعهٔ کلکولیتر دریافت نمایم، نخست از همه، باید (Mode) کلکولیتر به واحد درجهٔ حسب الخو اهش اعیار کنید ۰ جدول (Mode) یك نوع کلکولیتر در ذیل نشان داده شده است۰

Mode .	0	4	5	6	7	8	9
.. CD	Comp	DEG	RAD	GRA	FIX	SCI	NORM

مثال دوم : میخوا هیم (tan 45)را زریعهٔ کلکولیتر دریافت نمایم ؟

حل : نخست دکمهٔ (Mode) را بعدأ عدد (4) را با الترتیب فشار میدیهیم ۰ که کلکولیتر به واحد درجه اعیار گردد۔ در اخیر ، عدد ، یعنی زاوئِه (45) را در کلکولیتر ثبت کنید و بعداً دکمهٔ (tan) را فشار بدیهید که نتجه آن : ($\tan 45^\circ = 1$) است ۰ در اخیر کتاب راجع به استعمال کمپیو تر نیز بحث صورت گرفته است ۰

تمرینات ﴿ ۲ ــــ ۱ ﴾

(۱) در تمرینات (۱ الی ۱۲) توابع مثلثاتی زاویهٔ را در یافت کنید که ضلع دوم (r) آن از نقاط ذیل عبور کند ؟

1.	(6 , 8)	2.	(5 , 12)	3.	(15 , 8)	4.	(24 , 7)
5.	(9 , 40)	6.	(16 , 30)	7.	$(1 , \sqrt{15})$	8.	$(\sqrt{3} , 2)$
9.	(1 , 1)	10.	(6 , 5)	11.	(5 , 2)	12.	(1 , 1 / 2)

(۲) در تمرینات (۱۳ الی ۱٦) توابع مثلثاتی زاویهٔ را دریافت کنید که ضلع دوم (r) آنها از نقاط ذیل عبور کند ؟

13. (3.25 , 5.15) 14. (0.687 , 0.943) 15. (0.08623 , 0.01327) 16. (37.65 , 21.87)

(۳) در تمرینات (۱۷ الی ۲٤) قیمت یك تابع مثلثاتی معلوم است ، توابع دیگر آنرا در یافت کنید ؟

به اساس معلومات داده شده ، مجهول را دریافت کنید ۰۰۰

17. $\cos\theta = 12/13$ .... $\sin\theta = ?$, $\cot\theta = ?$

18. $\sin\theta = 1/2$ .... $\cos\theta = ?$, $\csc\theta = ?$

19. $\tan\theta = 1$ .... $\sin\theta = ?$, $\sec\theta = ?$

20 $\sec\theta = 4/3$ .... $\tan\theta = ?$, $\cos\theta = ?$

21, $\sin\theta = 0.750$ $\cot\theta = ?$, $\csc\theta = ?$

22. $\cos\theta = 0.300$ $\sin\theta = ?$, $\tan\theta = ?$

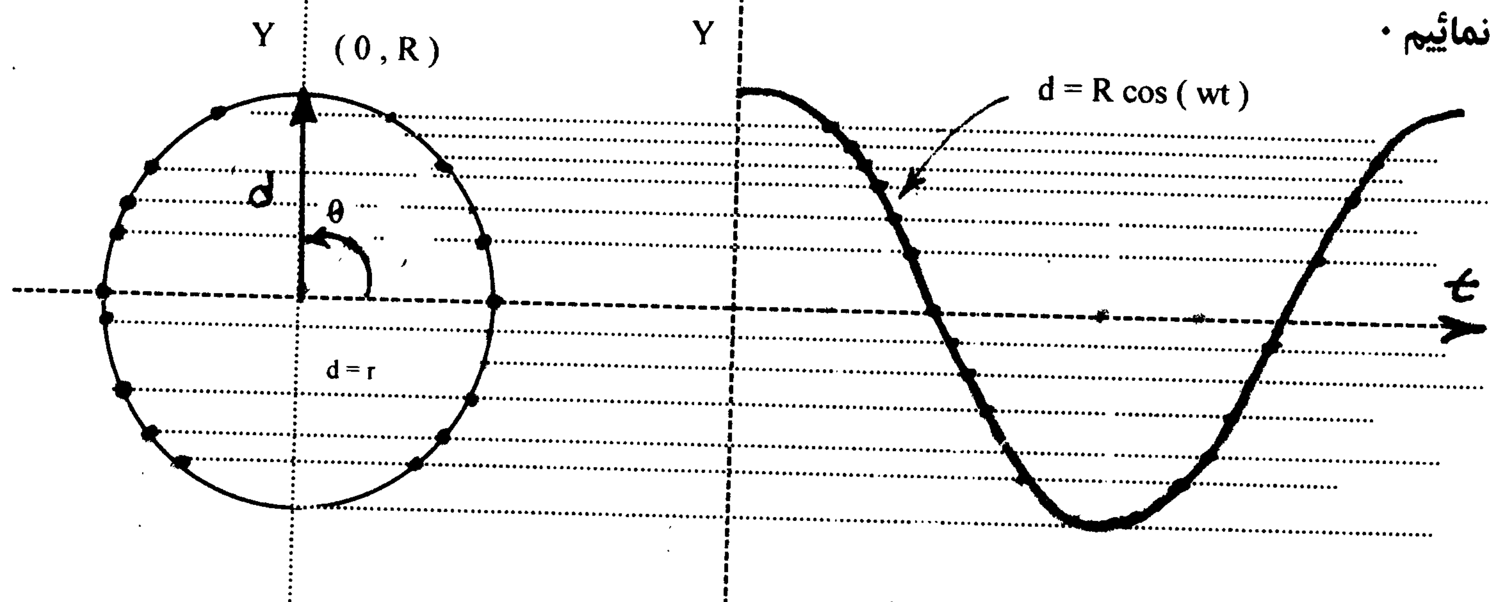
23. $\cot\theta = 0.254$, $\cos\theta = ?$, $\tan\theta = ?$

24. $\csc\theta = 1.20$, $\sec\theta = ?$, $\cot\theta = ?$

مثال دوم : اگر انجام یك شعاع (ویکتور) یك مسیر دایروی در نقطهٔ ($R/\sqrt{2}$, $R/\sqrt{2}$) موقعیت بگیرد ، ملا حظه شده میتواند که درین لحظه زاویهٔ دورانی یعنی $\theta = \pi/4$ است، زیرا ویکتور در وقتیکه $t = 0$ ، بحرکت خویش شروع میکند. لهذا مرتسم به تابع وقت مساوی میشود به: $d = R \sin(wt + \pi/4)$ ، در حالیکه اگر انجام شعاع مسیر برعکس در نقطهٔ (0 , R) واقع باشد و بعداً شروع بحرکت نماید، که درین صورت زاویهٔ $\theta = \pi/2 = 90^\circ$ ، میشود و قیمت $t = 0$ است. پس درین صورت مرتسم d به تابع وقت عبارت است از ، $d = R\sin(wt + \pi/2)$ که همچنان نوشته کرده میتوانیم :

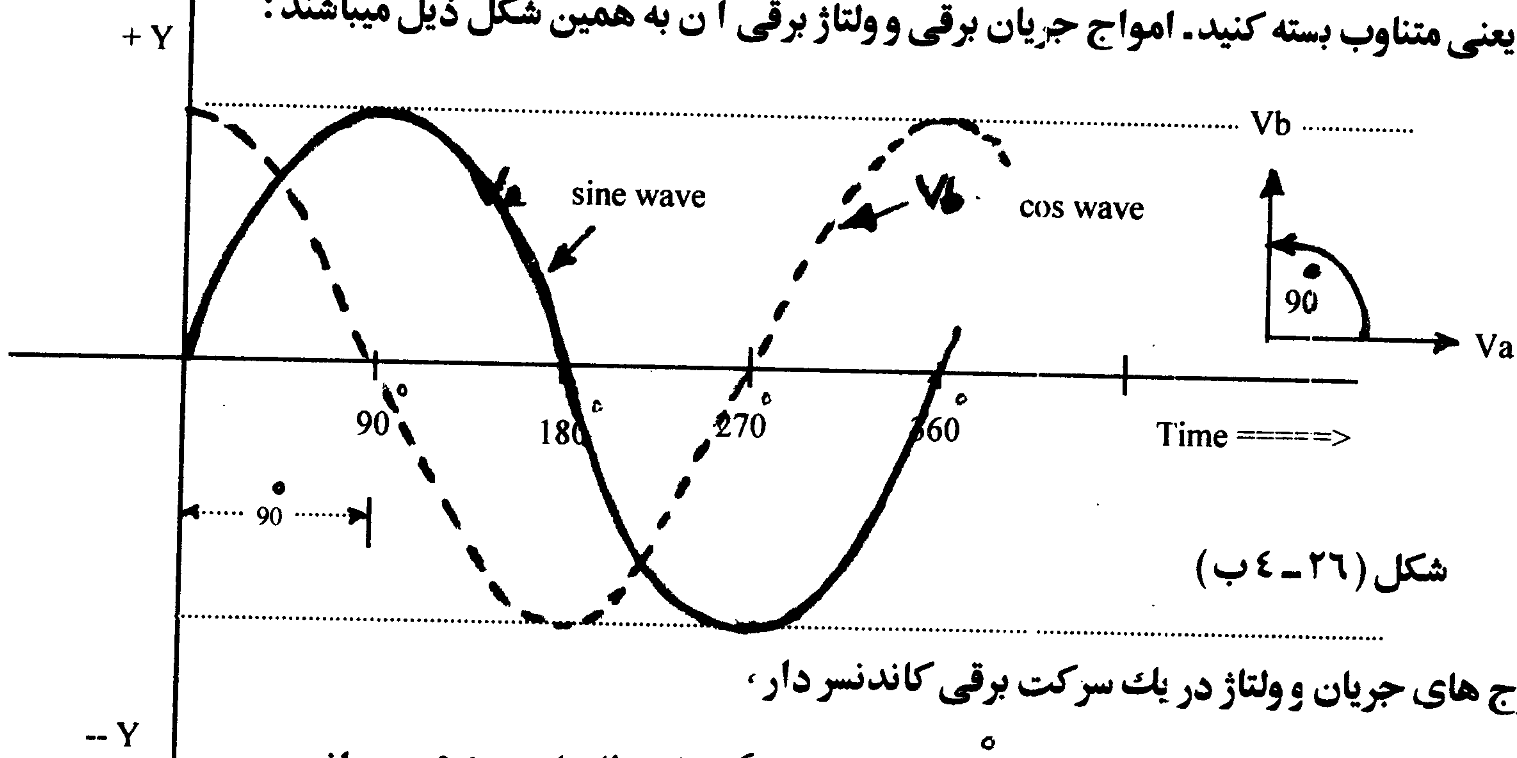
$$d = R \sin(wt + \pi/2) = R \cos(wt) \quad \text{........} \quad (2-G)$$

گراف معادلهٔ (2-G) را متوانیم در شکل (٢٦ ـ ٤ الف) تحلیل کرده آنرا به گراف sin 0 که قبلاً آنرا ترسیم کردیم ،مقایسه نمائیم .



شکل (٢٦ ـ ٤ الف)

از تحلیل گراف فوق الذکر ، ملاحذه شده میتواند اگر ویکتور d در نقطهٔ p (0 , R) موقعیت داشته و ویکتور d در همین وقت که $t = 0$ باشد شروع به حرکت نماید درین صورت گراف cos θ که فوقاً رسم گردیده ، بدست می آید . جهت مقایسه خوبتر موضوع ، به گرافهای: sin θ و cos θ در شکل (٢٦ ـ ٤ ب) توجه کنید . اگر شما یك کپسیتور ، یا کاندنسر را در یك سرکت AC یعنی متناوب بسته کنید. امواج جریان برقی و ولتاژ برقی آ ن به همین شکل ذیل میباشند :



شکل (٢٦ ـ ٤ ب)

موج های جریان و ولتاژ در یك سرکت برقی کاندنسر دار ،

گراف های sin θ و cos θ از هم دیگر به زاویهٔ 90° درجه از همدیگر خارج فاز یا out of phase اند ---

از همین خاطر است که در واتر پمپ های برقی آب که در چاها نصب میگردد ، کاندنسر نصب شده است. تا باعث شود که در میان جریان و ولتاژ یك زاویهٔ فاز تشکیل شود که موتور برقی موصوف را به حرکت دورانی خویش به یك قوهٔ مومنت اعظمی به چرخش درآورده بتواند .

از دروس گذشته داریم که :ــ $w = \theta / t$ است و یا θ عبارت است : $\theta = wt$ ، لهذا طول d را چنین ارایه کرده میتوانیم :

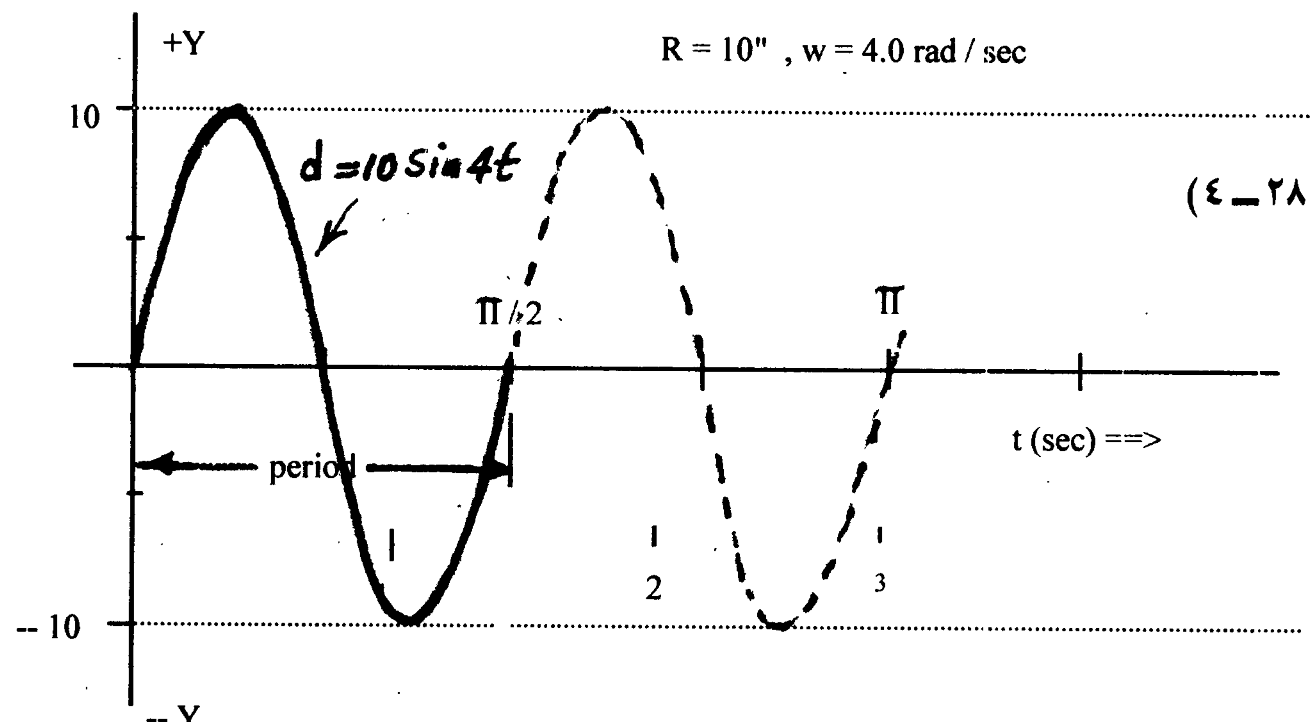
که : $d = R \sin (wt)$ ، و d ، عبارت از طول مرتسم (پراجکشن) شعاع دایره در حالت های مختلیف حرکت دایروی میباشد ۰ ازین معادله تحلیل ودرك شده میتواند که حالت حرکت یك زره بالای محیط یك دایره تابع وقت بوده که یك مفهوم بسیار مهم علم فزیك میباشد۰ بیا ئید ، حرکت دایروی یك زره در یك مسیر دایروی که طول مرتسم آن شعاع یك دایره بوده ، در یك حالت خاص مطالعه نمائیم : مثال ذیل را در نظر بگریم ـــ-

مثال :ــ شعاع دایرهٔ که یك زره بالای آن در حرکت دورانی بوده ، مساوی به ، "R = 10.0 میباشد و شعاع موصوف به اندازهٔ $w = 4$ rad. / sec در ظرف t ثانیه چرخش نموده است. شما ، رابطهٔ مثلثاتی آن شعاع یا d را دریافت نمأیید ؟

این مفهوم را به رابطهٔ مثلثاتی چنین نوشته کرده میتوانیم : $d = 10 \sin (wt)$ ....(3 -- G)

حال ، ارتباط d و t را وقتی خوبتر درك و تحلیل کرده میتوانیم که معادلهٔ فوق را سکیچ نمایم (d در مقابل t) ۰

گراف ذیل طول مرتسم شعاع R در وقت های مختلف t در ذیل رسم گردیده است: شکل (۲۸ ــ ٤)



شکل (۲۸ ــ ٤)

A (amplitude) = 10 , & b = 4 , $d = 10 \sin (4t)$

T (period) = $2\pi / b = 2\pi / 4 = \pi / 2$

قیمت اعظمی واصغری این گراف 10 + و 10 -- میباشد که این را بنام دامنه یا Amplitude یاد میکند ۰

ساحهٔ بسیار مهم تطبیق منحنی های مثلثاتی (گراف های مثلثاتی) فوق ، در بخش مطالعه جریان برقی متناوب یا AC قابل ارزش و دارای اهمیت از خاطر است که بغیر ازین طریقه تحلیل خوبتر واخذ مفهوم آن ناممکن میباشد ۰

جریان متناوب (Alternating Current - AC) در داخل سیم (هادی) یك جنیریتور وقتی تولید میشود که همین سیم (سیمها) در داخل ساحهٔ مقناطیسی (Flux) حرکت دورانی را شروع نماید ۰ که در نتیجهٔ آن هادی موصوف خطوط قوهٔ مقناطسی را متواتر به یك زاویهٔ تغیر پذیر قطع می نماید ۰ حال ، اگر این هادی به یك مسیر دایروی در داخل ساحهٔ مقناطسی به سرعت زاویوی (w) حرکت کند ، درینصورت مقدار جریان (i) که در داخل سیم در وقت t تولید میشود. میتوانیم به این معادل توضیح و تشریح نمأیم :

$$i = I_{max} \sin (wt + a) \quad ..... \text{4-II}$$

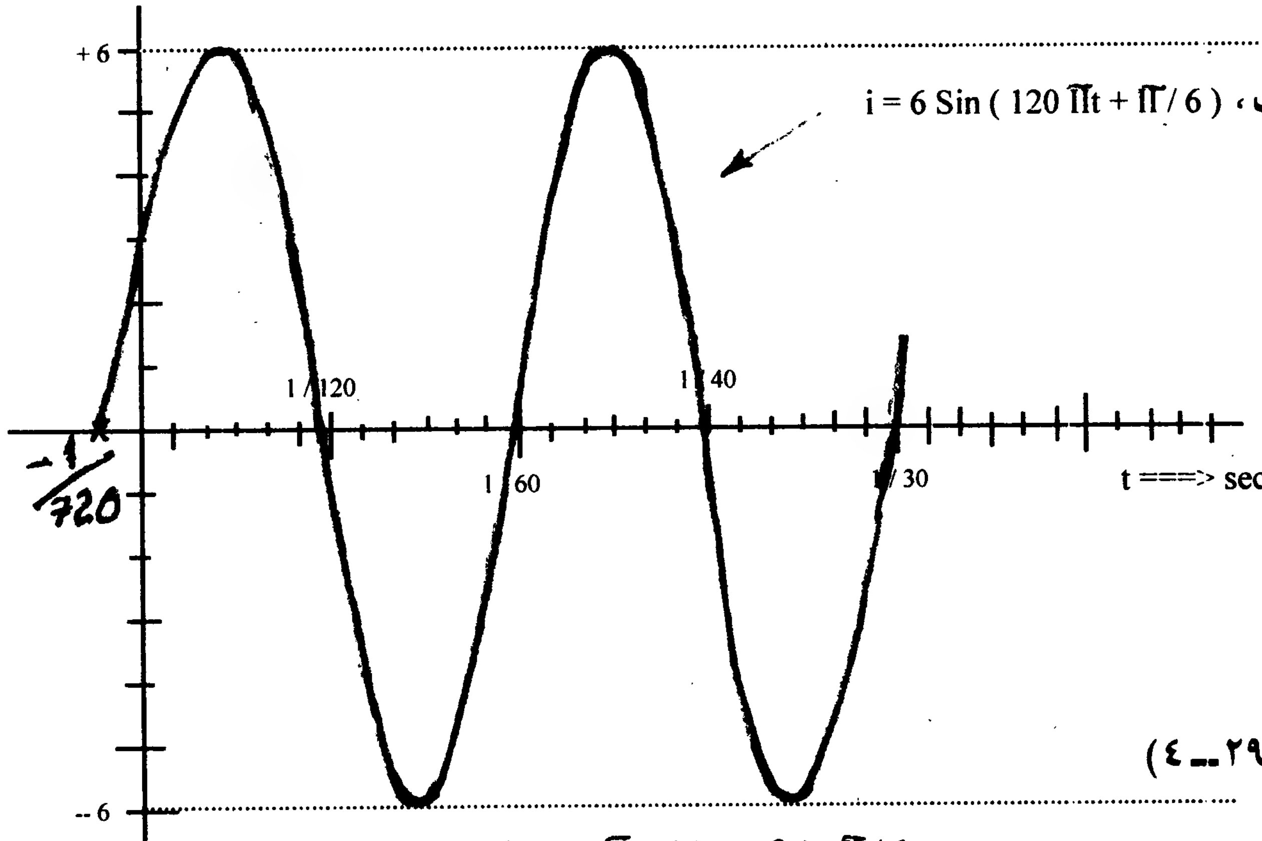
درین معادله ـ Imax عبارت از جریان اعظمی میباشد که در سیم وقتی تولید میشود که سیم موصوف خطوط قوهٔ مقناطسی را به زاویه 90 درجه قطع نماید ، و همچنان a زاویهٔ فاز یا phase angle است ۰

مثال : اگر در معادلهٔ فوق ، $I_m = 6.0$ ampere ، $w = 120\pi$ rad /sec و $a = \pi / 2$ در نظر گرفته شود ـ درین صورت مقدار جریان که در سیم جنر یتور تولید میشود ، عبارت است از :

$$i = 6 \sin (120 \pi t + \pi / 6)$$

که درین معادله : $c = \pi / 6$ و $b = 120\pi$ میشوند ۰

از معادلهٔ فوق الذکر ملاحظه شده میتواند که دامنه (Amplitude) ، عبارت است از 6 و پیریود آن ؛
ثانیه $T = 2\pi / b = 2\pi / 120\pi = 1 / 60$ بوده و تغیر حالت وقت ، یا (displacement) عبارت است از
ثانیه : $-c / b = -(\pi / 6) / (120\pi) = -1 / 720$ با داشتن این معلومات میتوانیم که گراف این معادله را به سهولت سکیچ نمائیم :



شکل (۲۹ـ۴)

Im = 6 Amp , $\omega = 120\pi$ rad /sec , $\alpha = \pi / 6$

$\omega = 120\pi$ rad. / sec

$T = 2\pi / b = 2\pi / 120\pi = 1 / 60$, $f = 1 / T = 60$ Hz. , displacement $= -c / b = -(\pi / 6) / (120\pi) = -1 / 720$

در مثال قبلی ـ سرعت زاویه وی ، w را به (120 rad /sec) تعین کرده بودیم که فریکونسی (متعلق) آن عبارت است :

$\omega = 2\pi f$, $f = w / 2\pi = (120$ rad /sec $) / 2\pi = 60$ Hz.

برای آنکه حرکت های زره را بالای مسیر دأیره وی خوبتر درک کرده بتوانیم ـ عموماً نرخ (rate) دوران را به فریکونسی تشریح میکنند ۰ فریکونسی (f) ، عبارت از تعداد اهتزاز در فی واحد وقت (ثانیه) قبول شده است ۰ عموماً فریکونسی از قرار سرعت زاویه وی (w) ، که عبارت است از رادین فی ثانیه نیز تعریف میکنند ۰ اما آنقدر رأیج نمیباشد ۰ واحد فریکونسی معمولاً عبارت ازهیرتز (Hertz) است ، یا (سایکل فی ثانیه) ـ f ====> cycle / sec

چون در یك سایکل 2π rad. زاویه موجود است ، لهذا : $\omega = 2\pi f$, $f = 1 / T = w / 2\pi$

﴿ سوالات ﴾

تمرین اول ؛ از (سوال ۱ الی ۲) ، مرتسم (پراجکشن) دو سایکل منحنی مثال اول برای تابع وقت t در قیمت های داده شده ذیل رسم کنید ؟

1. R = 4 inches , $\omega = 1.0$ rad. / sec 2. R = 8 cm , f = 0.5 Hz.

تمرین دوم : از (سوال ۲ الی ٤) ، برای مرتسم مثال اول ، فرض کنید که انجام شعاع از نقطه p (0 , R) شروع میشود ۰ مرتسم آنرا برای دو سایکل از قرار تابع وقت t و قیمت های داده شده ذیل رسم کنید ؟

3 . R = 2 ft , f = 1 Hz. 4. R = 2.5 inches , $\omega = 0.3$ rad./sec

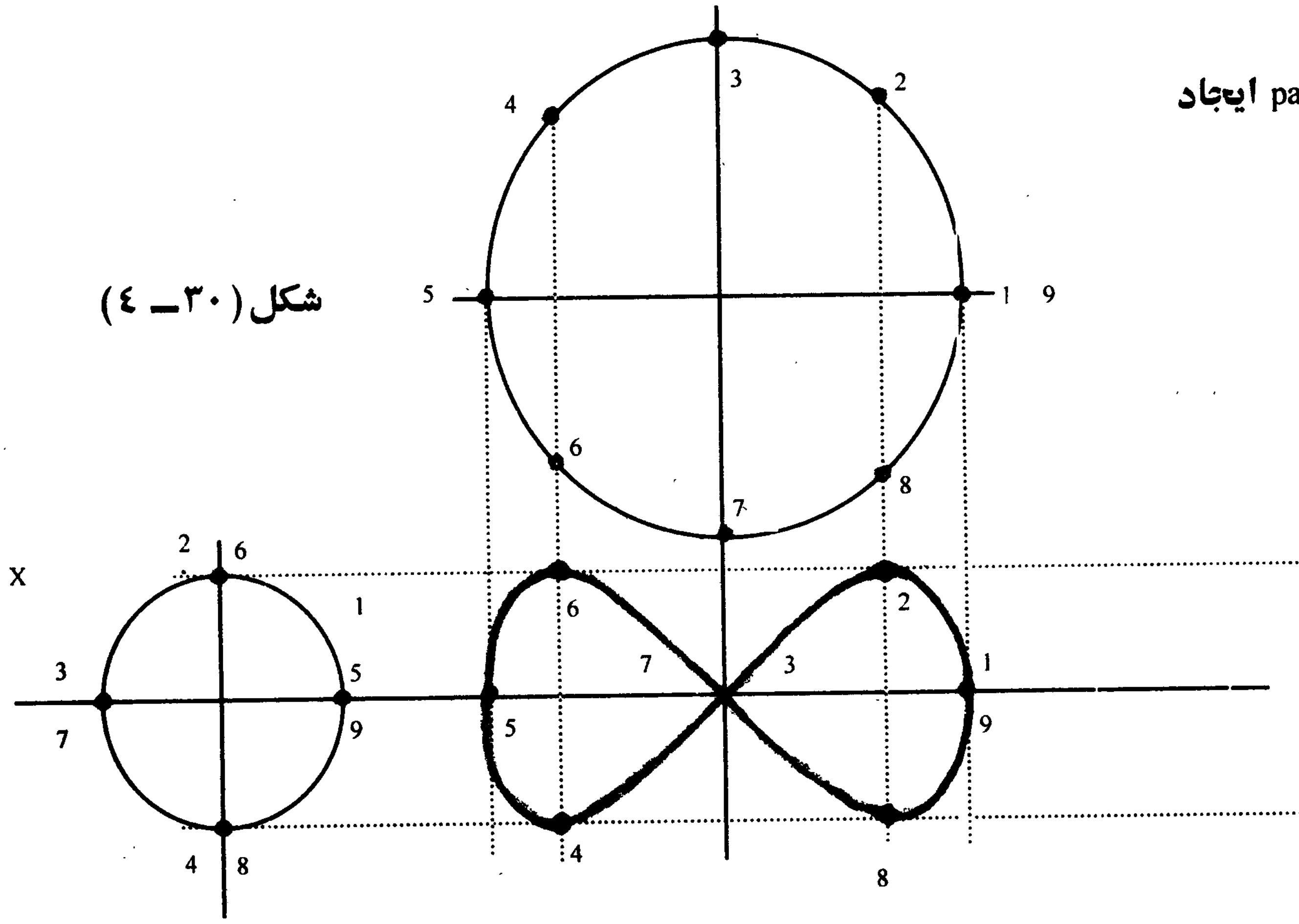
تمرین سوم : از (سوال ٥ الی ٦) برای مرتسم که در مثال اول تشریح گردید ، فرض کنید که انجام شعاع از نقا ط داده شدهٔ ذیل آغاز میشود ۰ مرتسم (پراجکشن) تابع را از قرار وقت t برای دو سایکل رسم کنید (مثال دوم را مطالعه فرمائید ۰

5 . R = 6 cm , f = 2 Hz. $p(\sqrt{3}\ R/2\ , R/2)$ 6. R = 3.2 ft , w = 0.2 rad / sec , $p(R/2\ , \sqrt{3}\ R/2)$

مثال پنجم : اگر ما یك دایره را بالای محور X و دایره دیگری را بالای محور Y بگذاریم درین صورت ما توانیستیم که قیمت های (x , y) را برای منحنی مثال قبلی (مثال ٤) ذریعهٔ طول های مرتسم (پراجکشن) یك نقطه که به اطراف هر دایره در محیط اش دوران میکند ، نشان بدهیم ۰ مطالعه کردن شکل (۳۰ ــ ٤) ، این موضوع را خوبتر توضیح و تشریح می نماید ۰ از مشاهدهٔ دقیق این شکل باید یاداشت نمائیم که شعاع دایرهٔ که قیمت x به او داده شده است ، طول شعاع آن 2 واحد و در حالیکه شعاع دایرهٔ دیگری 1 واحد میباشد۰ این مربوط به فرضیه یا تعریف دلخواه ما است ۰ و همچنان نظر به تعریفات، زرهٔ یا نقطهٔ بالای محیط آن دأیره که به محور x گذاشته شده است ، به سرعت دوچند نظر به آن نقطهٔ که به دایرهٔ محور y واقع بوده تیزتر دوران دارد ۰ به خاطر داشته باشید که این گراف را بنام Lissajous یاد میشود که از دو معادلهٔ پرامیتریك parametric ایجاد گردیده است۰

شکل (۳۰ــ ٤) ...

شکل (۳۰ ــ ٤)



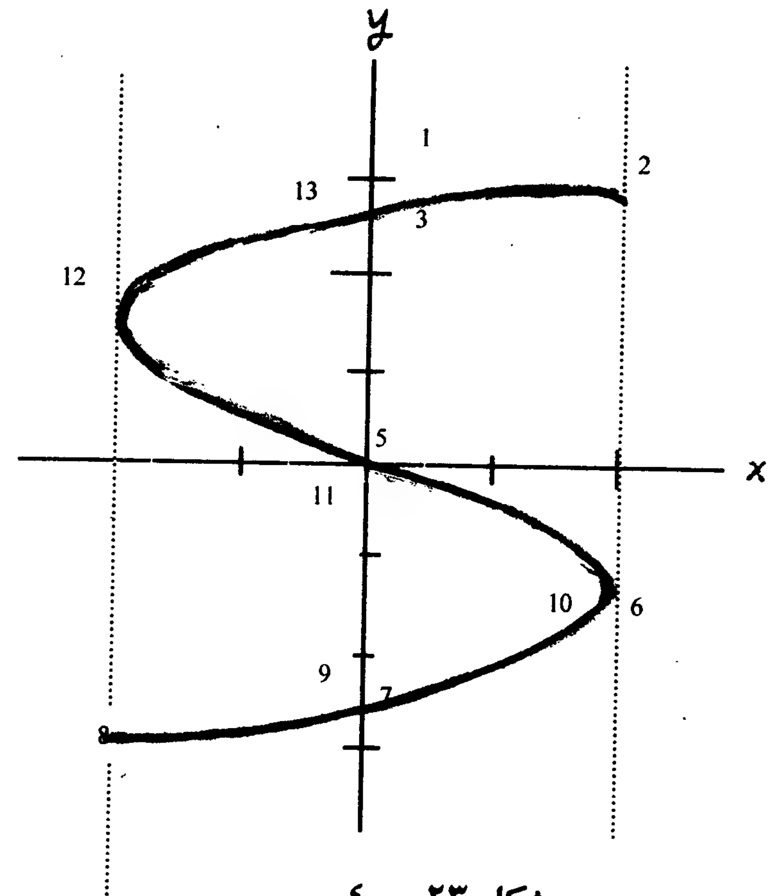
Lassajous Figure

مثال ششم : شکل لیس جیس ، Lassagous را برای قیمت های X و Y که به معادلات ذیل ارایه شده ، ترسیم کنید ؟

$$X = 2 \sin 3t \quad , \quad Y = 3 \sin (t + \Pi / 3)$$

اگر به قیمت های (t) که در معادلات فوق مضرب Π بوده ، قیمت ها داده شود ، درآن صورت قیمت های بسیار مناسب X و Y از آن بدست می آید۰ وما هم جدول را از قرار قیمت های (x , y) به تناسب t ترتیب میدیهیم ۰
(شکل ۲۳ــ٤) را ملاحظه نمائید که در آن جدول نیز گنجانده شده است ۰

t	X	Y	نمبر نقطه
0	0	2.7	1
π / 4	2	3	2
π / 3	0	2.6	3
π / 2	-- 2	1.5	4
2π/3	0	0	5
5 π/6	2	-- 1.5	6
π	0	-- 2.6	7
7 π/6	-- 2	-- 3	8
4π / 3	0	-- 2,6	9
3 π/ 2	2	-- 1.5	10
5 π /3	0	0	11
11 π	-- 2	1.5	12
2 π	0	2.6	13



شکل ۲۳ــ ٤

تمرین چارم: از (سوال ۷ الی ۸)، برای جریان متناوب که در مثال سوم بحث گردید، گراف دو سایکل تابع را از قرار وقت، برای قیمت های داده شده رسم کنید؟

7. $I_{max} = 2.0$ A , f = 60 Hz , a = 0   8. $I_m = 0.6$, w = 100 rad / s , $\alpha = \pi/4$

تمرین پنجم: از (سوال ۹ ــ ۱۰) در یك سرکت متناوب، معادلهٔ ولتاژ آن قرار ذیل داده شده است گراف معادلات را معادله فوق را برای دو سایکل از قرار تابع t، برای قیمت های داده شده ذیل رسم کنید؟ $e = E \cos(wt + a)$

9. E = 170 v. , w = 50 rad / s ,   10. E = 110 v , f = 60 Hz.

۱۱ ــ در یك رقاصه، زاویهٔ نوسان θ به معادلهٔ ذیل ارایه گردیده است، $\theta = \theta_0 \cos wt$ ...... درین معادله θ عبارت از زاویهٔ نوسان اولی است. اگر $\theta_0 = \pi / 30$ rad /sec. , w = 2 rad / s باشند، گراف این معادله را برای دو سایکل رسم کنید؟

۱۲ : ــ نوسان (displacement)، یك میلهٔ اهتزاز کننده به معادلهٔ ذیل ارایه شده است، $Y = 1.5 \cos 200\pi t$ گراف این معادله را برای دو سایکل ــ Y در مقابل t رسم کنید؟

۱۳ : ــ یك جسم که وزن آن W و مساحت مقطع آن A است. این جسم در مایع دارای کثافت (density) D غوطه شده و به اندازهٔ X از حالت اولی توازن خود فشرده شده است. بعداً دوباره به حالت اولی رها شده است. نوسان فشردگی جسم موصوف، از قرار تابع وقت به معادلهٔ ذیل ارایه گردیده است: $X = X_o \cos \sqrt{(dgA / W)}\, t$
$g = 32$ ft / sec^2 ، قوهٔ جاذبه زمین ــ W = 4 lb. ــ مساحت مقطع، A = 2 Sq. ft بوده و به اندازهٔ ۳ فت مربع فشرده شده است. $d = 62.4$ lb / ft^3 معادلهٔ را مطابق ارقام داده شده ساده نموده طوریکه فشرده گی X تابع وقت باشد، بعداً گراف این معادله را برای دو سایکل رسم کنید؟

۱٤ ـــ یك موج در یك تار حرکت میکند ۰ نوسان (displacement) از قرار تابع وقت t از حالت توازن آن به معادلهٔ ذیل ارایه گردیده است: $Y = A \cos (2\pi / T) t$, $T = 0.1$ sec. , $A = 2$ درین معادله، T پیریود حرکت به واحد ثانیه اندازه میشود ۰ گراف دو سایکل نوسان این معادله را از قرار ثابت وقت t رسم کنید؟

۱۵ : ـــ یك جسم در نوك یك فنر (سپرینگ) بسته گردیده است، نوسان (displacement) آنرا از قرار تابع وقت، t از حالت توازن به معادلهٔ ذیل ارایه گردیده است؛ $X = A \cos (wt + a)$ ، گراف دو سایکل معادلهٔ فوق را در صورت دریافت کنید که: $a = \pi / 2$, $f = 0.5$ Hz , $A = 2"$ باشند ۰

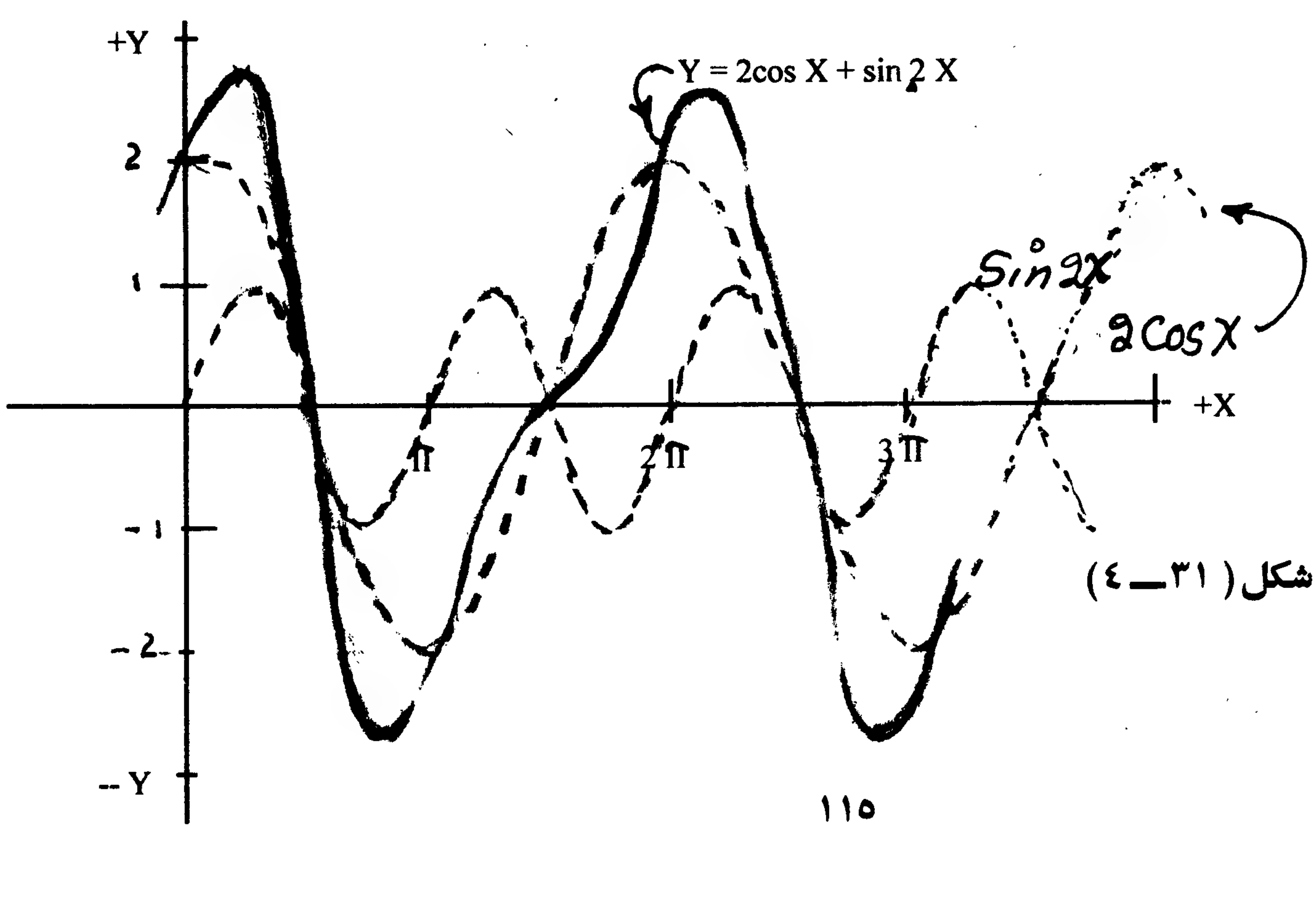
۱٦ : ـــ نوسان (displacement) رقاصهٔ سوال ۱۱ به معادلهٔ ذیل ارایه شده است: $\theta = \theta o \sin (wt + \pi / 6)$ اگر $w = \pi / 2$ rad. / sec ، $\theta o = 1$ rad /sec باشند، گراف این معادله را برای دو سایکل، θ در مقابل t رسم کنید؟

﴿ گراف های مشترك توابع مثلثاتی ﴾

در اکثر تطبیقات ساینسی ضرورت می افتد تا توابع مثلثاتی بقسم مشترك بکار برده میشوند ۰ درین بخش، ما دو طریقهٔ بسیار مهم را تحت بحث قرار میدیهیم، که در آن گرافهای مثلثاتی با هم یکجا میباشند ۰ اگر ما گراف توابع مثلثاتی که از مجموع دو توابع دیگر بوجود آمده باشند، در نظر میگیریم ۰ جهت تکمیل کردن گراف این دو نوع تابع مشترك از طرزا لعمل ذیل استفاده مینمأیم ۰ تا نتیجه گراف های یکجا شده از آن بدست آید ۰ طروق سکیچ کردن گرافهای توابع مثلثاتی مشترك یا جمع شده، در مثال های ذیل تشریح میشود :

مثال اول : گراف توابع داده شده را سکیچ نمأید: $Y = 2 \cos X + \sin 2 X$

حل ، بالای عین محور های X و Y (Coordinates) ، نخست گراف تابع $Y = 2\cos X$ و بعداً گراف تابع $Y = \sin 2X$ را سکیچ مینمأیم ۰ این رسم ها در شکل (۳۱ ـــ ٤) به خطوط نقطه ـ نقطه نشان داده شده است ۰ برای چندین قیمت های X ، فاصلهٔ بالا و پأین محور X را در نقاط مختلیف پیدا میکنیم ۰ بعداً این فواصل را با هم جمع مینمائیم ۰ در جمع این فاصله ها باید متوجه باشیم که فاصلهٔ بالا از محور X مثبت و فاصلهٔ پأین از محور X ، منفی در نظر گرفته میشود ۰
پس برای هر قیمت X از روی جمع فواصل ، نقاط مربوط Y را پیدا میکنیم ۰ که بالاخره ، از جمع این نقاط یك نقطهٔ جدید Y بدست می آید ۰ نقاط که از جمع کردن قیمت های Y بدست می آید ، عبارت از منحنی جدید است که مجموع هر دو گراف را نشان میدیهد ۰ مثلاً در شکل (۳۱ ـ ٤) این گراف ها را ملاحظه کرده میتوا نید ۰

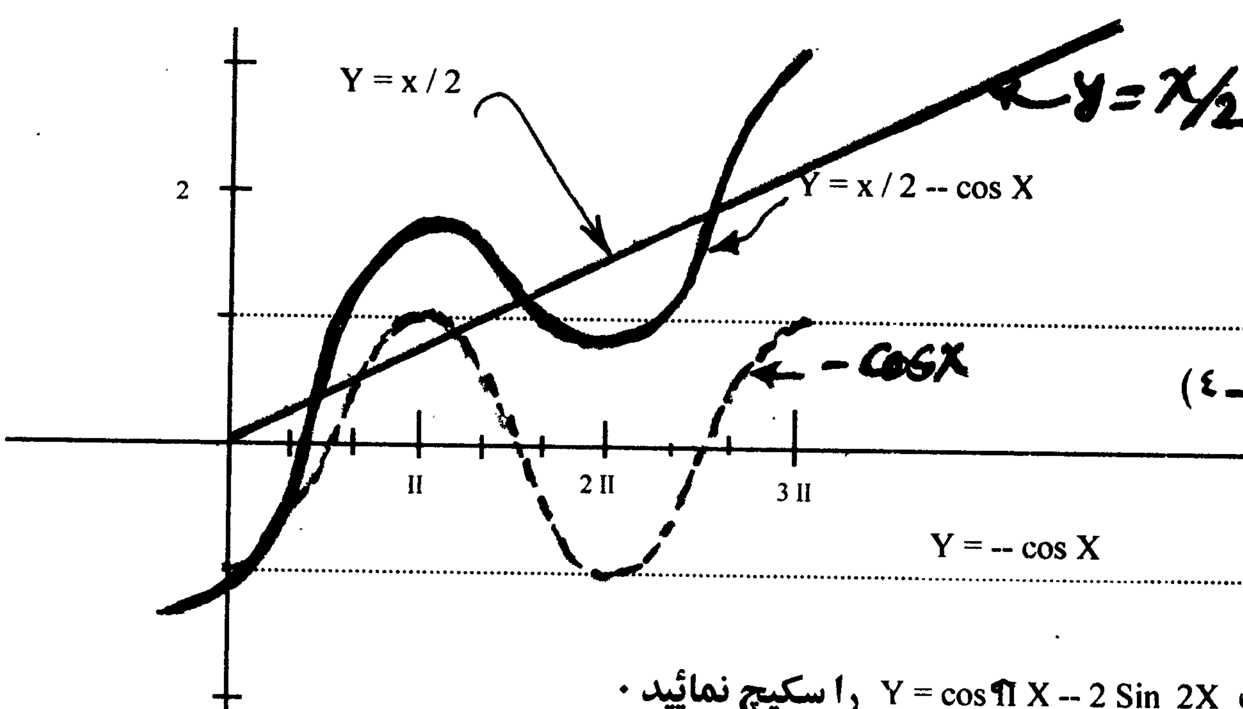


شکل (۳۱ ـــ ٤)

در جمع نقاط مختلیف ، باید متوجه باشیم که نقاط مناسب را در محور X انتخاب نمأیم . بطور مثال : وقتیکه یك منحنی محور X را عبور میکند ، قیمت Y در آن نقطه مساوی به صفر است . لهذا منحنی محصول قیمت X برای منحنی دوم عین X میباشد . به این نقطه توجه کنید که sin 2 X ، در قیمت های : $X = 0$ ، $X = \pi/2$ ، $X = \pi$ ، مساوی به صفر اند . وما مشاهده میکنیم که ، نقاط منحنی محصول بالای منحنی ، 2 cos X واقع مباشد . ما همچنان ، باید هر دو منحنی ها را در نقاط اعظمی نیز باهم جمع نمأیم ، مثلاً : sin 2 X در قیمت $\pi/4$ مساوی میشود به (1) . درینجا ، دو قیمت Y باهم جمع میشوند در قیمت ، $X = 5\pi/4$ ، ما باید در جمع نقاط بسیار دقیق باشیم ، زیرا درین نقطه ، قیمت sin 2 X مثبت بوده و قیمت 2 cos X منفی میباشد . توجه خاص و منطق عملی در انتخاب نقاط باید محسوس شود . صحیح و دقیق بودن گراف محصول و مربوط به طرز انتخاب عملی نقاط بالای محور X میباشند .

مثال دوم : گراف $Y = X/2 - \cos X$ را سکیچ کنید ؟

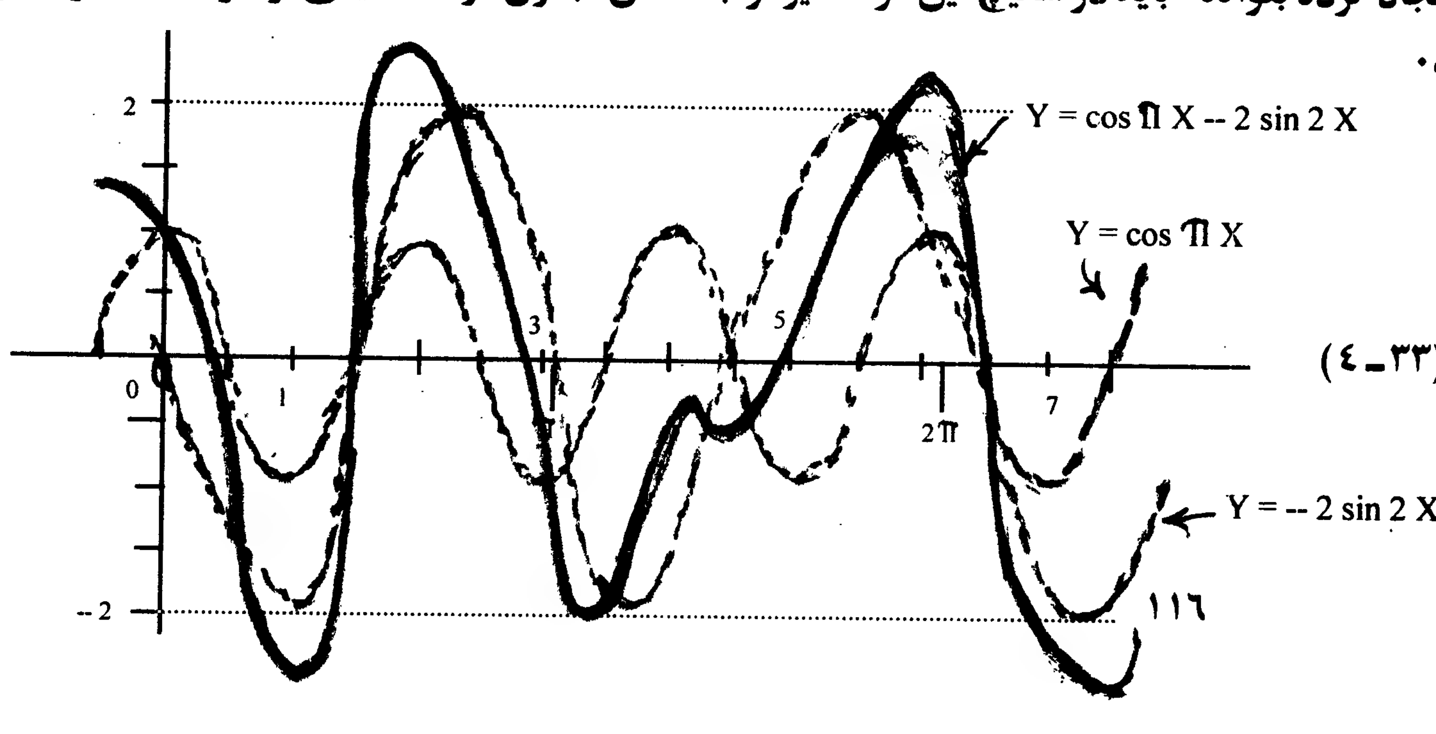
در معادلهٔ فوق میدانیم که جز : $Y = x/2$ معادلهٔ فوق ، در حقیقت معادلهٔ یك خط مستقیم بوده ، که دارای میلان $1/2$ و از مرکز (مبدأ) محور ها عبور میکند . این گراف باید همرای منفی گراف تابع مثلثات cos X یکجا گردد . در اینجا ، ما نخست باالتریب ، گرافهای : $Y = x/2$ و $Y = -\cos X$ را رسم مینمأیم . و بعداً قیمت های Y گراف : $Y = \cos X$ را با قیمتهای گراف ، $Y = x/2$ جمع مینمأیم . که در نتیجه محصول مشترك هر دو گراف بدست می آید . طریقهٔ دیگر اینست که نخست گراف خط را رسم و بعداً از آن در نقاط مختلیف گراف تابع cos X را تفریق نمأیم . شکل (۳۲ ــ ٤) را مطالعه فرمأیید .



شکل (۳۲ ــ ٤)

مثا ل سوم : گراف $Y = \cos \pi X - 2 \sin 2X$ را سکیچ نمائید .

نخست گراف ـ $Y = 2 \sin 2X$ و بعداً $Y = \cos \pi X$ ، که بالتریب با خطوط نقطه ـ نقطه در شکل (۳۳ ــ ٤) نشان داده شده است ، رسم میکنیم . قیمت های X برای هر منحنی طوری انتخاب میگردد که قیمت ـهای صفر و اعظمی را در مقابل Y ایجاد کرده بتواند . باید در سکیچ این گراف نیز توجه خاص مبذول گردد که یکی از جز ها مثبت و دیگری آن منفی میباشد .



شکل (۳۳ ــ ٤)

یك تطبیق بسیار مهم منحنی های مثلثاتی وقتی دلچسپ میشود که آنها با هم دیگر به زاویهٔ های قایم با همدیگر جمع شوند. این مفهوم را میتوانیم در عمل با تطبیق کردن چندین ولتاژ در یك آلهٔ بنام (Oscilloscope) آ سیلوسکوپ، مشاهده کنیم. درین مورد مثالهای ذیل قابل اهمیت است.

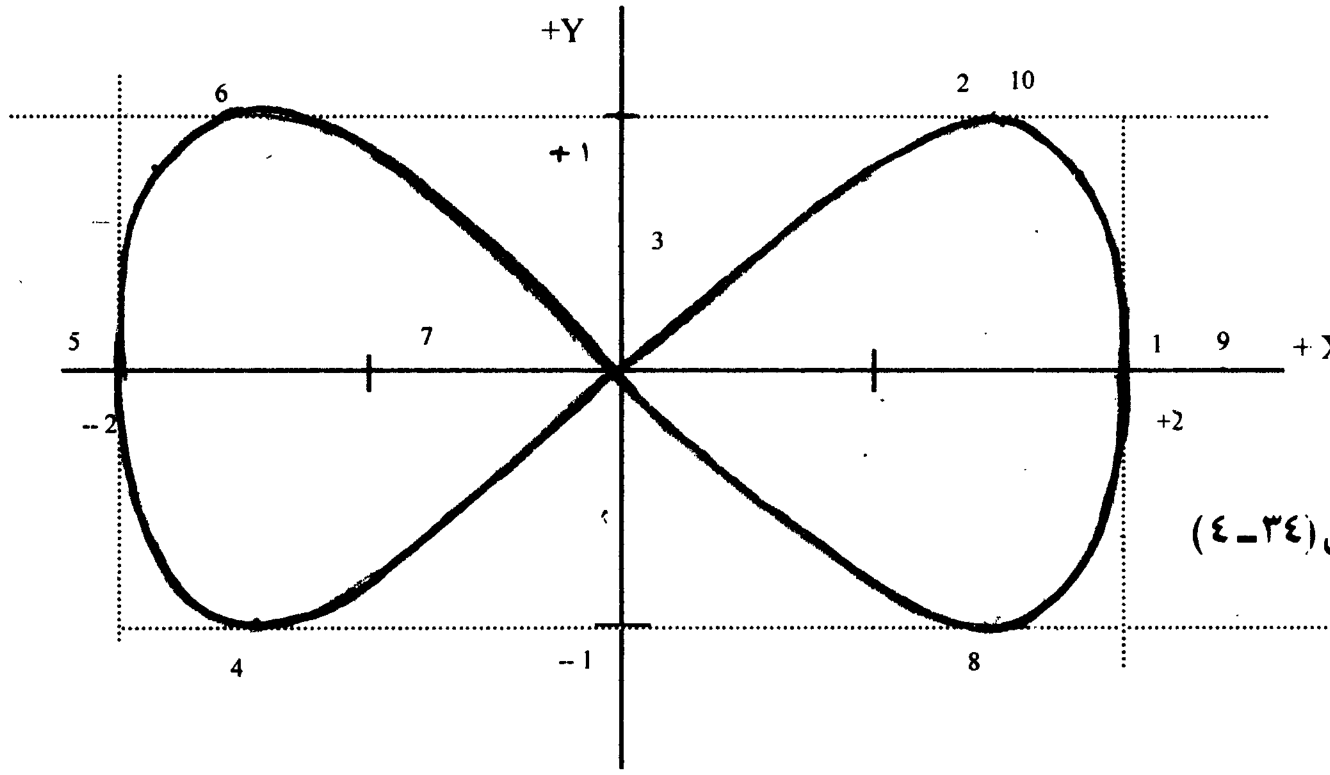
تمرین چارم : گراف را برای قیمت های X و Y که به معادلات ذیل ارایه گردیده است، ترسیم کنید.

$$X = 2 \cos \pi t , \qquad Y = \sin 2\pi t$$

معادلات که فوقاً نشان داده شده است، توابع X و Y ، هر دو از قرار عین متحول سوم ارایه شده میتواند و بنام معادلات : (Parametric Equation) ، پرامیتریك یاد میشوند.

در معادلات فوق، هر تابع X و Y از قرار عین متحول t ارایه گردیده است. با تعین کردن قیمت های مختلف برای متحول t ، میتوانیم قیمت متناسب X و Y را دریافت نمائیم. و با استفاده این قیمت ها در یك جدول، میتوانیم گراف نقاط تعین شده (مشخص شده) را ترسیم کنیم : شکل (۳٤ ــ ٤).

t	0	1/4	1/2	3/4	1	5/4	3/2	7/4	2	9/4
X	2	1.4	0	-- 1.4	-- 2	-- 1.4	0	1.4	2	1.4
Y	0	1	0	-- 1	0	1	0	-- 1	0	1
نمبر نقطه	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10



شکل (۳٤ ـ ٤)

چون X و Y توابع مثلثاتی یك متحول سوم t میباشند، و همچنان محور های X و Y با هم دیگر عمود اند، لذا قیمت های X و Y که به این ترتیب بدست می آید، منجر به منحنی های مشترك مثلثاتی میشوند که با هم دیگر نیز عمود اند. اشکال که به این طریقه بدست می آید بنام اشکال لیس جس Lissajous Figures یاد میشوند.

تمرین ۲ ـ ۴

تمرین اول (از سوال ۱ الی ۲۰) گراف های معادلات ذیل را از قرار جمع فواصل Y (Ordinates) رسم کنید؟

1. $Y = X + \sin X$, 2. $Y = X + 2 \cos X$, 3. $Y = (1/3) X - \cos X$

4. $Y = (1/4) X - \sin X$, 5. $Y = 1/10 (X) + \sin X$, 6. $Y = 1/3 (X) + \cos X$

7. $Y = 1/(X + 1) - \sin 2X$, 8. $Y = 1/3 (X) - \cos \pi X$ 9. $Y = \sin x + \cos X$

10. $Y = \sin X + \sin 2X$, 11, $Y = \sin X - \sin 2X$, 12. $Y = \cos 3X - \sin X$

13. $Y = 2\cos 2X + 3\sin X$, 14. $Y = 1/2 (\sin 4X) \cos 2X$,

15. $Y = 2\sin X - \cos X$, 16. $Y = \sin (x/2) - \sin X$

17. $Y = 2\cos 4X - \cos (X - \pi/4)$ 18. $Y = \sin \pi X - \cos 2X$

19. $Y = 2 \sin (2X - \pi/6) + \cos (2X + \pi/3)$ 20. $Y = 3 \cos 2\pi X + \sin \pi / (2X)$

تمرین دوم : از (سوال ۲۱ الی ۲۸)، لیس جیس (Lissajous) را ترسیم نمأید :

21. $Y = \sin t$, $X = \sin t$, 22. $Y = 2\cos t$, $X = \cos t$ 23. $Y = \sin \pi t$, $X = \cos \pi t$

24. $Y = \sin 2t$, $X = \cos (t + \pi/4)$ 25. $Y = 2 \sin \pi t$, $X = \cos \pi (t + 1/6)$

26. $Y \sin \pi t$, $X = \cos 2\pi t$ 27. $Y = \cos 2t$, $X = 2 \cos 3t$, 26. $Y = 3\sin 3\pi t$, $X = 2\sin \pi t$

تمرین سوم : (از سوال ۲۹ الی ۳٤)، اشکال مناسب را سکیچ کنید ؟

۲۹ : ـــ جریان در یك سرکت برقی به فورمول ذیل ارایهٔ گردیده است : $i = 4 \sin 60 \pi t + 2\cos 120 \pi t$

گراف این معادله را در صورت سکیچ کنید که قیمت i به امپیر تابع وقت t باشد ؟

۳۰ ، ـــ در علم اوپتیك گفته میشود اگر ـ دو موج از یك نوع میدیم medium عبور میکند ، یکدیگر خود را به قسم تخریب اخلال میکنند ٠ که مقدار اعظمی موج محصله از نتیجه این دو موج صفر است ٠ شما گراف معادلهٔ ذیل را سکیچ کنید و هم بگویید که ایا موج اخلال شده دو موج از آن بدست آمده و یا خیر ؟ $Y = \sin X + \cos (X + \pi/2)$

۳۱ : ـــ یك جسم تحت شرأیط خاص اهتزاز میکند که نوسان (displacement) آن ذریعهٔ معادلهٔ ذیل ارایه گردیده است : $Y = 0.4 \sin 4t + 0.3 \cos 4t$ **گراف این معادله را سکیچ کنید که Y به واحد فت باشد و t به ثانیه ٠**

۳۲ : ولتاژ محصول در یك سرکت برقی به فورمول ذیل ارایهٔ گردیده است : $e = 50 \sin 50 \pi t + 80 \sin \pi t$

گراف این معادله را به قسم تابع وقت رسم کنید ؟

۳۳ : ـــ دو نوع سیگنل به یك آسیلوسکوپ داده شده است طوریکه در آسیلوسکوپ با هم دیگر عمود ملاحظه شده اند ٠ معادلات که نوسان این سیگنل ها را کنترول میکند ، باالتریب عبارت اند از: $Y = 3 \cos 120 \pi t$, $X = 2 \cos 120 \pi t$ **شکل که بروی آسیلوسکوپ آشکار خواهد شد، رسم کنید ؟**

۳٤ : ـــ شکل لیس جیس معادلات ذیل رادریافت کنید ؟ $W1 = \sin wt$, $W2 = \sin (wt + \pi / t)$

﴿ تمرین عمومی فصل چارم ﴾

تمرین اول : (از سوال ۱ الی ۲۸)، منحنی های توابع مثلثاتی ذیل را سکیچ کنید ؟

1. $Y = 2/3 \sin X$, 2. $Y = -4 \sin X$, 3. $Y = -2\cos X$, 4. $Y = 2.3 \cos X$

5. $Y = 2 \sin 3X$, 6. $Y = 4.5 \sin 12X$, 7. $Y = 2 \cos X$, 8. $Y = 4 \cos 6X$

9. $Y = 3 \cos 1/3 (X)$ 10. $Y = 3 \sin 1/2 (X)$ 11. $Y = \sin \pi X$, 12. $Y = 3 \sin 4\pi X$

13. $Y = 5 \cos 2\pi X$, 14. $Y = -\cos 3\pi X$, 15. $Y = -0.5 \sin \pi/6 (X)$ 16 $Y = Y 8 \sin \pi/4 (X)$

17. $Y = 2 \sin (3X - \Pi/2)$ 18. $Y = 3 \sin (X/2 + \pi/2)$ 19. $Y = -2\cos (4X + \pi)$ 20. $Y = 0.8 \cos (X/6 - \pi/2)$

21. $Y = -\sin (\pi X + \pi/6)$ 22. $Y = 2 \sin (3\pi X - \pi)$ 23. $Y = Y = 8 \cos (4\pi X - \pi/2)$

24. $Y = 3 \cos (2\pi X + \pi)$ 24. $Y = 3 \tan X$ 25. $Y = 1/4 (\sec X)$

27. $Y = -1/3 (\csc X)$ 28. $Y = -5 \cot X$

تمرین دوم: (از سوال ۲۹ الی ۳٦) گراف های معادلات را به طریقهٔ جمع کردن قیمت های Ordinates سکیچ کنید؟

29. $Y = 1/2 (\sin 2X) - X$ 30. $Y = 1/2 (X) - \cos 1/2 (X)$ 31. $Y = \sin 2X + 3 \cos X$

32. $Y = \sin 3X - 2 \cos X$ 33. $Y = 2 \sin X - \cos 2X$ 34. $Y = \sin 3X - 2 \cos X$

35. $Y = \cos (X + \pi/4)$ 36. $Y = 2 \cos \pi X + \cos (2\pi X - \pi)$

تمرین سوم: (از سوال ۲۷ الی ٤٠) اشکال لیس جیس را رسم کنید؟

37. $Y = 2 \sin \pi t$, $X = -\cos 2\pi t$ 38. $Y = \sin t$, $X = \sin (t + \pi/t)$

39. $Y = \cos \pi t$, $X = \cos (2\pi t + \pi/4)$ 40. $Y = \cos (2t + \pi/3)$ $X = \cos (t - \pi/6)$

تمرین چارم: (از تمرین ٤١ الی ٥٤)، اشکال مناسب را سکیچ کنید.

٤١ : — یك رقاصه به در آمدن سرعت از حالت تعادل آغاز به حرکت میکند، زاویهٔ بین عمود و رقاصه به معادلهٔ ذیل ارایه گردیده است: $g = 32\ ft/sec^2$ ، $\theta = a \sin (\sqrt{g/L}\ t)$ که درین معادله، a دامنه یا amplititude به واحد رادین است، و g تعجیل جاذبهٔ زمین است، L طول رقاصه به واحد فت میباشد و t مدت زمان حرکت است. گراف معادلهٔ فوق را برای دو سایکل که تابع t بوده برای یك رقاصه که طول آن ۲ فت و $a = 0.1$ rad رسم کنید؟

٤٢ : — جریان برق در یك سرکت به معادلهٔ ذیل داده شده است: $i = Io \sin (t / \sqrt{LC})$ که درین معادله- Io عبارت از جریان اولی سرکت بوده، L اندکتینس سرکت و C کپسیتینس سرکت میباشد. $Io = 0.5$ A، $L = 1.0$ H ، $C = 100\mu f$
گراف این معادله را برای دو سایکل طوری رسم کنید که i تابع t به واحد ثانیه میباشد.

٤٣ : یك جسم در اخیر فنر (سپرینگ) به اهتزاز آورده میشود. نوسان (diaplacement) آن از قرار تابع وقت به معادلهٔ ذیل ارایه گردیده است، $Y = 0.2 \cos 8t$ که درین معادله Y به میتر و t به ثانیه میباشد. گراف Y در مقابل t رسم کنید

٤٤ : — سرعت V یك پیستون به واحد سانتی میتر فی ثانیه در یك انجن به معادلهٔ ذیل نشان داده شده است.
$V = wD \cos wt$ که درین معادله، w، سرعت زاویه وی یك کرنك شفت به واحد رادین فی ثانیه، t وقت به واحد ثانیه میباشد. گراف V در مقابل t یك انجن که سرعت دورانی آن $w = 3,000$ rad / min و $D = 3.6$ cm باشد

٤٥ : — یك موج مقناطیسی برق به معادلهٔ ذیل ارایه گردیده است، $Y = a \sin (8\pi * 10^{14} t + \pi/6)$
گراف این معادله را برای دو سایکل که Y به واحد سانتی میتر در مقابل t به ثانیه باشد، رسم کنید؟

٤٧ : — چارج q یك کپاسیتور در حالت که تابع وقت است، به رابطهٔ ذیل نشان داده شده است:
$q = 0.001 (1 - \cos 100t)$ درین معادله چارج q به واحد کولمب، t به واحد ثانیه اندازه میشود. گراف این معادله را برای دو سایکل بقسم q در مقابل t رسم کنید؟

٤٨ : — گراف معادلهٔ $Y = 4 \sin 2t - 2 \cos 2t$ را رسم کنید؟

٤٩ : — تحت شرائط خاص، مسیر یك زره در حال حرکت به معادلهٔ ذیل نشان داده شده است:
$Y = \sin 3\pi t$, $X = 2 \cos 3\pi t$ گراف معادلهٔ فوق را رسم کنید؟

٥٠ : — دو سیگنل به یك آسیلوسکوپ تطبیق گردیده است، معادلات که نوسان سیگنل هارا کنترول میکند، به معادلات ذیل نشان داده شده است: $Y = \sin 120\ wt$ و $X = 2 \cos 40\pi t$ سیگنل که در آسیلو سکوپ نمایان میشود رسم کنید؟

٥١ : ارتفاع یك راکت که عموداً پائین میشود، به معادلهٔ ذیل ارایه گردیده است: $h = 800 \tan \theta$ ، زاویه θ عبارت از زاویهٔ ایلیویشن است. که یك ناظر به فاصلهٔ 800 میتر دورتر از نقطهٔ فایر راکت میبیند. h به مقابل θ رسم کنید؟

٥٢ : — یك معادلهٔ قوهٔ F که ارتباط آن به مرکبهٔ محور X، از قرار Fx چنین ارایه شده است: $F = Fx \sec \theta$
که درین معادله θ عبارت از زاویه بین قوهٔ F و Fx بوده، گراف F درمقابل θ درحالت رسم کنید که $Fx = 500$ lb باشد

٥٣ : — مساحت یك مستطیل بقسم تابع قطر آن به معادلهٔ ذیل ارایه گردیده است: $A = d^2 \sin \theta \cos \theta$ درین معادله- θ عبارت از زاویهٔ بین قطر مستطیل و یك ضلع آن میباشد. گراف A در مقابل θ برای قیمت $d = 10$ m رسم کنید؟

(٤) در تمرینات (۲۵ الی ۲۸) نقاط داده شده بالای ضلع دوم زاویه ، (r) واقع اند، نشان بدهید که توابع مثلثاتی داده شده برای هر سه نقطه تغیر نمیخورد ؟

25.	(3 , 4) ,	(6 , 8) ,	(4.5 , 6)	;	$\sin\theta$ & $\tan\theta$
26.	(5 , 12) ,	(15 , 36) ,	(7.5 , 18)	;	$\cos\theta$, $\cot\theta$.
27.	(2 , 1) ,	(4 , 2) ,	(8 , 4)	;	$\tan\theta$, $\sec\theta$.
28.	(3 , 2) ,	(6 , 4) ,	(9 , 6)	:	$\csc\theta$, $\cos\theta$

(٥) سوالات مربوط به تمرینات (۲۹ الی ۳۲) را جواب بگوید ؟

۲۹ ــ از تعریف توابع مثلثاتی ، استنباط میشود که ($\csc\theta$) معکوس ($\sin\theta$) است ، بگوئید ، کدام تا بع مثلثاتی معکوس $\cos\theta$ میشود ؟

۳۰ــ مطابق سوال ۲۹ ، کدام تابع مثلثاتی معکوس ($\tan\theta$) میشود ؟

۳۱ــ اگر ($\cot\theta$) ضرب ($\sin\theta$) شود ، کدام تابع مثلثا تی دیگر بدست می آید ؟

۳۲ــ اگر ($\sin\theta$) را بالا ی ($\cos\theta$) تقسیم کنید ، کدام تابع دیگر حا صل میشود ؟

قیمت ها ی توا بع مثلثاتی :

در دروس گذشته یاد گرفتیم که هر گاه یك نقطه را که بالای ضلع دوم ، (r) واقع بوده و معلوم باشد میتوا نیم تمام توابع مثلثاتی همان زاویه را محا سبه کنیم ۰ در حا لیکه در امور عملی ، باید مقدار زاویه را به واحد درجه بدانیم ۰ یا به عبارهٔ دیگر ـ اگر مقدار زاویه به واحد درجه معلوم شده باشد باید تمام توابع مثلثاتی آن را دریافت کرده بتوانیم ۰

یك طریقه اینست که زاویهٔ مطلوب را توسط نقاله و خطکش انجینری (Scale) به اندازهٔ بسیار دقیق و حساس رسم کنیم ـ بعداً مثلث قایم الزاویهٔ که به دست می آید ، طول اضلاع آن را ذریعهٔ خطکش دقیقاً اندازه گیری کنیم و از تناسب طول اضلاع مثلث قایم الزاویه ، توابع مثلثا تی مطلوب بدست بیا وریم ۰ این مطلب در مثال های ذیل تشریح گردیده است:

مثال ا ول : از علم هندسه میدانیم که در یك مثلث قایم الزاویهٔ (30° -- 60°) ، طول ضلع مقابل زاویهٔ (30°) مساوی به نصف طول وتر آن مثلث است ۰ پس ، اگر ضلع مقابل این زاویهٔ (30°) را یك واحد طول انتخاب نمایم ، درینصورت طول وتر این مثلث مساوی به دو واحد طول میشود ۰ نظر به قضیهٔ فیثا گورین طول ضلع (X) مساوی میگردد به ($\sqrt{3} = \sqrt{2^2 - 1^2}$) ۰
شکل (۱۳ــ۱) را مطالعه کنید ۰ توابع مثلثاتی را قرار ذیل پیدا کرده میتوانیم : ($X = \sqrt{3}$, $Y = 1$, $r = 2$)

$\sin 30^\circ = 1/2$, $\cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$, $\tan 30^\circ = 1/\sqrt{3}$, $\cot 30^\circ = \sqrt{3}/1$, $\sec 30^\circ = 2/\sqrt{3}$, $\csc 30^\circ = 2/1 = 2$

$\cos 60^\circ = 1/2$, $\sin 60^\circ = \sqrt{3}/2$ $\cot 60^\circ = 1/\sqrt{3}$ $\tan 60^\circ = \sqrt{3}/1$ $\csc 60^\circ = 2/\sqrt{3}$ $\sec 60^\circ = 2/1$

اگر به جوابات فوق خوب دقیق شو یم ، دیده میشود که ، ($\sin 30^\circ$) مساوی ($\cos 60^\circ$) است ۰ همچنان دیگران نیز یك به دیگر مساوی اند ۰ از طرف دیگر ، مجموع زاویهٔ (30°) و زاویهٔ (60°) مساوی میشود به (90°) درجه ۰
لهذا ، نتجه میگیریم که : هر گاه مجموع دو زاویه مساوی به (90°) شود ، ($\sin$) یکی مساوی به ($\cos$) دیگر میشود ۰

مثال دوم : میخوا هیم توابع مثلثاتی زاویهٔ (45°) را دریافت نما ئیم ؟

از علم هندسه میدانیم ، در یك مثلث قایم الزاویه ، اگر یکی از زاویه ها آن (45°) باشد زاویهٔ سومی آن نیز (45°) میگردد ۰ همچنان میدانیم که این یك مثلث قایم الزاویهٔ متساوی ا لسا قین (دو ضلع آن با هم مساوی میباشند) است ۰
حال اگر دو ضلع مساوی این مثلث را ، هر کدام (۱) و (۱) واحد طول داشته باشد ، پس طول وتر آن ($\sqrt{2}$) واحد میشود ۰ شکل (۱٤ــ ۱) ۰

٥٤ : ــــ طاقت لحظوئ در يك سركت برقى عبارت از حاصل ضرب ولتاژ لحظوى e و جريان لحظوئ i تعريف ميشود ·
اگر ولتاژ لحظوئ به ؛ $e = 100 \cos 200t$ و جريان لحظوئ به : $i = 2 \cos (200t + \pi/4)$ ارايه شده باشند. گراف ولتاژ و گراف جريان در يك سيستيم كواردينيت X--Y در مقابل t رسم كنيد · و بعداً گراف طاقت (electric power) بواحد وات بعد از ضرب كردن e با i يا (i X e) براى قيمت هاى مناسب W كه از ضرب كردن i در e بدست مى آيد، رسم كنيد ؟

﴿ فصل پنجم ﴾

مطابقت های مثلثاتی :

در دروس گذشته راجع به تعریفات توابع مثلثاتی بحث کافی صورت گرفت ، بطور مثال : $\sin \theta = y / r$ ، یکی از شش تابع مثلثاتی تعریف شدهٔ است و همچنان تعریف نمودیم که $\csc \theta = r / y$ ۰ ازین دو تعریف نتیجه میگیریم که $\sin \theta = 1 / \csc \theta$ میشود۰ و این مساوات بعدی برای هر زاویه صدق میکند (برای هر قیمت θ تعادل فوق برقرار میباشد) ۰ این نوع مساوات که برای هرقیمت زاویه صدق بکند ، بنام مطابقت مثلثاتی یاد میگردد ۰

درك كردن و آشنآیی به این مطابقت های مثلثاتی به چندین وجه قابل اهمیت بوده ـ در ثبوت قانون کوساین از مطابقت مثلثاتی استفاده بعمل آمد۰ همچنان ، در حل معادلات مثلثاتی ، بخش Calculus واکثر پرابلم های تخنیکی ازمطابقت های مثلثاتی استفاده کردن ضروری میباشد۰

بعضی مطابقت های که از تعریفات توابع مثلثاتی بدست آمده است ، بنام مطابقت های بنیادی (اساسی) یاد میشوند ،که در ذیل یك باری دیگر تشریح و توجه میگردد :

مطابقت های اساسی یا بنیادی مثلثاتی

$\sin \theta = 1 / \csc \theta$	$\cos \theta = 1 / \sec \theta$	$\tan \theta = 1 / \cot \theta$
$\tan \theta = \sin \theta / \cos \theta$	$\cot \theta = \cos \theta / \sin \theta$	$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$
$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$	$1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$	

درین مطابقت ها ، زاویه θ هر قیمت گرفته میتواند ۰

این قابل یاد آوری است که ، هر قدر شاگرد با مطابقت های اساسی بلدیت داشته باشد، با همان اندازه در ثبوت مطابقت های مغلق ما هر میباشد۰

مثال اول : این مطابقت مثلثاتی را ثبوت نمأید ؟

$$\sin X = \cos X / \cot X$$

حل : نظر به مطابقت اساسی ما داریم که $\cot X = \cos X / \sin X$ <== ، لهذا در طرف دست راست مطابقت فوق قیمت مطابقت $\cot X$ را تعویض مینمأیم :

$$\sin X = \frac{\cos X}{\frac{\cos X}{\sin X}} = (\cos X / 1)(\sin X / \cos X) = \sin X$$

مثا ل دوم : ثبوت کنید که : $\tan \theta \csc \theta = \sec \theta$

حل ، چون نظر به مطابقت اساسی ، $\tan \theta = \sin \theta / \cos \theta$ <== این قیمت را در مطابقت فوق تعویض مینمأیم

$$(\sin \theta / \cos \theta)(1 / \sin \theta) = 1 / \cos \theta = \sec \theta$$

$$1 / \sin \theta = \csc \theta$$

مثال سوم: افادهٔ مثلثاتی ذیل را ساده نمأیید، $(\sec\theta + \tan\theta)(1 - \sin\theta) = ?$

حل، $(\sec\theta + \tan\theta)(1 - \sin\theta) = (1/\cos\theta + \sin\theta/\cos\theta)(1 - \sin\theta)$

$$= \{(1+\sin\theta)/\cos\theta\}(1 - \sin\theta)$$

$$= \{(1 - \sin^2\theta)/\cos\theta\} = \cos^2\theta/\cos\theta$$

$$= \cos\theta \quad \text{جواب}$$

مثال چارم: مطابقت ذیل را تثبیت یا تأیید کنید؟ $[(\tan\theta + \cos\theta)/\sin\theta] = \sec\theta + \cot\theta$

حل،

$$\frac{\tan\theta + \cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\tan\theta}{\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\frac{(\sin\theta)}{\cos\theta}}{\sin\theta} + \cot\theta$$

$$= 1/\cos\theta + \cot\theta = \sec\theta \cot\theta \quad \text{جواب}$$

مثال چارم: "الف" مطابقت ذیل را ثبوت کنید؟ $\sec 0 - \cos 0 = \sin 0 \tan 0$

$$\sec\theta - \cos\theta = \frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta = \frac{(1 - \cos^2\theta)}{\cos\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} = \sin\theta\left[\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right]$$

$$= \sin\theta\tan\theta \quad \text{جواب}$$

مثال پنجم: مطابقت ذیل را ثبوت کنید؟

$$\frac{\cos\theta\csc\theta}{\cot^2\theta} = \tan\theta$$

حل:

$$\frac{\cos\theta\csc\theta}{\cot^2\theta} = \frac{\cos\theta\csc\theta}{1/\tan^2\theta} = \cos 0 \csc 0 \tan^2\theta$$

$$= \tan\theta(\cos\theta\csc\theta\tan\theta) = \frac{\tan\theta(\cos\theta\csc\theta\sin\theta)}{\cos 0}$$

$$= \tan\theta(1)(1) = \tan\theta \quad \text{جواب}$$

مثال ششم: مطابقت ذیل را ثبوت کنید؟ $\sin^4 t - \cos^4 t = (\sin^2 t - \cos^2 t)$

$$\sin^4 t - \cos^4 t = (\sin^2 t - \cos^2 t)(\sin^2 t + \cos^2 t) = (\sin^2 t - \cos^2 t)(1) = \sin^2 t - \cos^2 t \quad \text{جواب}$$

مثال هفتم : مطابقت ذیل را ثبوت کنید ؟

$$\frac{\cos t}{1-\sin t}=\frac{1+\sin t}{\cos t}$$

حل ،

$$\frac{\cos t}{1-\sin t}=\frac{\cos t}{1-\sin t}\left[\frac{1+\sin t}{1+\sin t}\right]$$

$$=\frac{\cos t\,(1+\sin t)}{1-\sin^2 t}=\frac{\cos t\,(1+\sin t)}{\cos^2 t}=\frac{1+\sin t}{\cos t}$$ جواب

مثال هشتم : مطابقت ذیل را ثبوت کنید ؟

$$(\tan\theta-\sec\theta)^2=\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}$$

حل ،

$$(\tan\theta-\sec\theta)^2=\tan^2\theta-2\tan\theta\sec\theta+\sec^2\theta$$

$$=\left[\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right]^2-2\left[\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right]\left[\frac{1}{\cos\theta}\right]+\left[\frac{1}{\cos\theta}\right]^2$$

$$=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}-\frac{2\sin\theta}{\cos^2\theta}+\frac{1}{\cos^2\theta}=\frac{\sin^2\theta-2\sin\theta+1}{\cos^2\theta}$$

$$=\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}=\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\left[\frac{1-\sin\theta}{1-\sin\theta}\right]=\frac{1-2\sin\theta+\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}$$

$$=\frac{1-2\sin\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$ جواب

مثال نهم : افادهٔ الجبری ذیل بحیث تابع مثلثاتی که تابع θ بوده و عاری از جذر باشد تبدیل نمأیید در صورتکه $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$ تحول نماید . برای اجرأ این کار ما میتوانیم که $x = a\sin\theta$ تعین نموده و همچنان $a > 0$ میباشد . (افادهٔ الجبری، $\sqrt{a^2-x^2}$

حل ، اگر $x = a\sin\theta$ تعین کرده و بعداً در افادهٔ الجبری فوق تعویض نمأیم ، پس چنین داریم :

$$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-(a\sin\theta)^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}$$

$$=\sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)}=\sqrt{a^2\cos^2\theta}=a\cos\theta$$ جواب

مثال دهم : مطابقت ذیل را ثبوت نمأیید ؟ $\sec^2\theta/\cot\theta-\tan^3\theta=\tan\theta$

$$\frac{\sec^2\theta}{\cot\theta}-\tan^3\theta=\frac{\sec^2\theta}{1/\tan\theta}-\tan^3\theta=\sec^2\theta\tan\theta-\tan^3\theta$$

$$=\tan\theta(\sec^2\theta-\tan^2\theta)=\tan\theta(1)=\tan\theta$$ جواب

مثال ۱۱ : مطابقت ذیل را ثبوت کنید ؟

$$\frac{1-\sin\theta}{\sin\theta\cot\theta}=\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$$

حل ،

$$\frac{1 - \sin\theta}{\sin\theta \cot\theta} = \frac{(1 - \sin\theta)(1 + \sin\theta)}{(\sin\theta \cot\theta)(1 + \sin\theta)}$$

$$= \frac{1 - \sin^2\theta}{\sin\theta\,[\cos\theta / \sin\theta]\cdot(1 + \sin\theta)} = \frac{\cos^2\theta}{\cos\theta\,(1 + \sin\theta)} = \frac{\cos\theta}{1 + \sin\theta}$$

مثال ۱۲ : **مطابقت مثلثاتی ذیل را ثبوت کنید ؟**

$$\sec^2\theta + \csc^2\theta = \sec^2\theta \csc^2\theta$$

حل ،

$$\sec^2\theta + \csc^2\theta = \sec^2\theta \csc^2\theta$$

$$= (1 + \tan^2\theta)(\csc^2\theta)$$

$$= \csc^2\theta + \tan^2\theta \csc^2\theta$$

$$= \csc^2\theta + (\sin^2\theta / \cos^2\theta)(1 / \sin^2\theta)$$

$$= \csc^2\theta + (1 / \cos^2\theta) = \boxed{\csc^2\theta + \sec^2\theta}$$ جواب

مثال ۱۳ : **مطابقت ذیل را ثبوت نمأئید ؟**

$$\frac{\csc t}{\tan t + \cot t} = \cos t$$

حل ،

$$\frac{\csc t}{\tan t + \cot t} = \frac{\csc t}{\tan t + (1 / \tan t)} = \frac{\csc t}{(\tan^2 t + 1) / \tan t}$$

$$= \frac{\csc t \tan t}{\tan^2 t + 1} = \frac{\csc t \tan t}{\sec^2 t}$$

$$= \frac{(1 / \sin t)[(\sin t) / (\cos t)]}{(1 / \cos^2 t)} = \left(\frac{1}{\sin t}\right)\left(\frac{\sin t}{\cos t}\right)\left(\frac{\cos^2 t}{1}\right)$$

$$= \boxed{\cos t}$$ جواب

تمرین (۱ـ۵)

مطابقت های ذیل را ثبوت کنید ؟

1. $\cos\theta \sec\theta = 1$
2. $\cot\theta / \cos\theta = \csc\theta$
3. $\sin\theta \sec\theta = \tan\theta$
4. $\sin\theta / \tan\theta = \cos\theta$
5. $\csc\theta / \sec\theta = \cot\theta$
6. $\sin t \cot t = \cos t$
7. $(1 + \cos t)(1 - \cos t) = \sin^2 t$
8. $\sin x \sec x = \tan x$
9. $\cos^2 t - \sin^2 t = 2\cos^2 t - 1$

10. $\csc^2 x\,(1 - \cos^2 x) = 1$ 11. $\sin t / \csc t + \cos t / \sec t = 1$ 12. siin $x(1 + \cot^2 x) = \csc x$

13. $(1 + \sin t)(1 - \sin t) = 1 / \sec^2 t$ $\sin x(\csc x - \sin x) = \cos^2 x$ 15. $\sec t - \cos t = \tan t \sin t$

16. $\tan\theta(\cot\theta + \tan\theta) = \sec^2\theta$ 17. $\csc^2 t / (1 + \tan^2 t) = \cot^2 t$ 18. $\sin x \tan x + \cos x = \sec x$

19. $\sin t(\csc t - \sin t) = \cos^2 t$ 20. $\cos\theta \cot\theta + \sin\theta = \csc\theta$ $\csc t - \sin t = \cot t \cos t$

22. $\sec t \tan t \csc t = \tan^2 t + 1$ 23. $(\sec^2 x - 1) / \sec^2 x = \sin^2 x$ $\cot\theta \sec^2\theta - \cot\theta = \tan\theta$

25. $(\cos^2 x - 1)(\tan^2 x + 1) = 1 - \sec^2 x$ 26. $\tan x + \cot x = \sec x \csc x$

27. $\sec t \csc t + \cot t = \tan t + 2\cos t \csc t$ 28. $\cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$

29. $\sec^2 t \csc^2 t = \sec^2 t + \csc^2 t$ 30. $\sin x / (1 - \cos x) = \csc x + \cot x$

31. $(1 + \cos x) / \sin x + \sin x / (1 + \cos x) = 2\csc x$ 32. $(\sec x + \csc x) / (1 + \tan x) = \csc x$

33. $(1 + \tan^2\theta) / \tan^2\theta = \csc^2\theta$ 34. $\tan^2 x \cos^2 x + \cot^2 x \sin^2 x = 1$

35. $[(1 + \sin t) / (1 - \sin t)] - [(1 - \sin t) / (1 + \sin t)] = 4\tan t \sec t$

36. $\sec x / \cos x - \tan x / \cot x = 1$ 37. $(1 + \csc t) / \sec t - \cot t = \cos t$

38. $(1 - 2\cos^2 x) / (\sin x \cos x) = \tan x - \cot x$ 39. $(\sec u - \tan u)(\csc u + 1) = \cot u$

40. $4\sin\theta + \tan\theta = (4 + \sec\theta) / \csc\theta$ 41. $(\cot v - 1) / (1 - \tan v) = \cot v$

42. $\sec x + \tan x + \cot x = (1 + \sin x) / (\cos x \sin x)$ 43. $\csc^4 t - \cot^4 t = \cot^2 t + \csc^2 t$

44. $(\cos\theta + \sin\theta) / (1 + \tan\theta) = \cos\theta$ 45. $\cos\theta / (1 - \sin\theta) = \sec\theta + \tan\theta$

46. $(\tan x + \cot x)\sin x \cos x = 1$ 47. $\tan^2 t / (\sec t + 1) = (1 - \cos t) / \cos t$

48. $2\sin^4 x - 3\sin^2 x + 1 = \cos^2 x(1 - 2\sin^2 x)$

49. $(\cot x - 1) / (\cot x + 1) = (1 - \tan x) / (1 + \tan x)$

50. $(\sin^4 u - \cos^4 u) / (1 - \cot^4 u) = \sin^4 u$ 51. $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 x - \cos^2 x$

52. $[\cot 2x / (\sec 2x - \tan 2x)] - [\cos 2x / (\sec 2x + \tan 2x)] = \sin 2x + \csc 2x$

53. $\tan^4 r - \sec^4 r = 1 - 2\sec^2 r$ 54. $(\sec t + \tan t)^2 = (1 + \sin t) / (1 - \sin t)$

55. $(\sin^2 x + \cos^2 x)^3 = 1$ 56. $(1 + \csc x) / (\cot x + \cos x) = \sec x$

57. $[(\sin^2\theta / \tan^4\theta)^3][(\csc^3\theta / \cot^6\theta)^2] = 1$

58. $(\sin x + \cos x) / (\tan^2 x - 1) = \cos^2 x / (\sin x - \cos x)$

59. $(a\cos t - b\sin t)^2 + (a\sin t + b\cos t)^2 = a^2 + b^2$

60 $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x$

61. $[\sin x / (1 + \cos x)] + [(1 + \cos x) / \sin x] = 2\csc x$

62. $[\csc x / (1 + \csc x)] - [\csc x / (1 - \csc x)] = 2\sec^2 x$

63. $1 / (\tan t + \cot t) = \sin t \cos t$ 64. $(\cot x - \tan x) / (\sin x \cos x) = \csc^2 x - \sec^2 x$

65. $\sec\theta + \csc\theta - \cos\theta - \sin\theta = \sin\theta \tan\theta + \cos\theta \cot\theta$

66. $\sin^3 x + \cos^3 x = (1 - \sin x \cos x)(\sin x + \cos x)$

67. $(1 - \tan^2\theta)^2 = \sec^4\theta - 4\tan^2\theta$

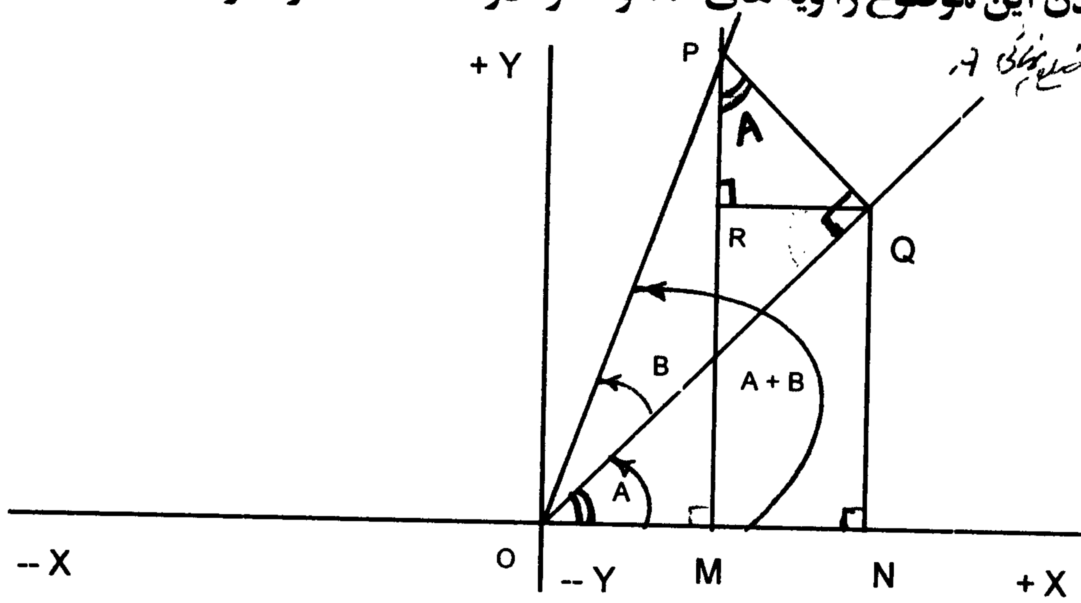
68. $\cos^4 x + 1 - \sin^4 x = 2\cos^2 x$ 69. $[\tan x / (1 - \cot x)] + [\cot x / (1 - \tan x)] = 1 + \sec x \csc x$

70. $\sin(-t)\sec(-t) = -\tan t$ 71. $\cot(-x) / \csc(-x) = \cos x$

ثبوت فورمولهای ، $\sin(A \pm B)$ و $\cos(A \pm B)$:

در بسا موارد تطبقی فزیك ، ضرورت می اوفتد تا توابع مثلثاتی دو چند زاویه و یا نصف یك زاویه را ارایهٔ و بکار ببریم ۰ برای انکه این ارتباطات مهم را بدست آورده بتوانیم ، ضروری است تا نخست توابع مجموع دو زاویه و تفاضل دو زاویه را به قسم فورمول ها ارائه و ثبوت کرده بتوانیم ۰ ما درین بحث خویش باید ، نخست فورمولهای : $\sin(A+B)$ و $\cos(A+B)$ را ثبوت نمأییم ۰ جهت ارایه و ثبوت کردن این موضوع زاویه های $\hat{A}$ و $\hat{B}$ را در حالت ستندارد موقیعت میدیهیم ،

شکل (۱ ــــ ۵)



شکل (۱ ــــ ۵)

در شکل (۱ ــ ۵)، ملا حظه میشود که زاویه های $\hat{A}$ و $\hat{A+B}$ باالترتیب بحالت ستندارد بوده اضلاع اولی ایشان بالای محور (X +) قرار دارند ۰ از نقطهٔ P ، ضلع نهائی زاویهٔ $\hat{A+B}$ دو عمود را باالترتیب بالای محور X وضلع نهائی زاویهٔ $\hat{A}$ رسم مینمأیم ، که محور X را در نقطهٔ M وضلع زاویهٔ $\hat{A}$ را در نقطهٔ Q قطع کنند ۰ بعداً از نقطهٔ Q دو عمود باالترتیب بالای محور X وخط PM رسم کرده که محور X را در نقطهٔ N وخط PM را در نقطهٔ R قطع مینمایند ۰ با رسم کردن این شکل ، ملا حظه میشود که زاویهٔ $\hat{QPR}$ وزاویهٔ A با هم مساوی اند زیرا نظر به علم هندسه، اضلاع آنها با یکدیگر عمود اند۰ و همچنان زاویهٔ $\hat{RQO}$ مساوی است به زاویهٔ $\hat{A}$ ---- قانون متبادله ۰ از طرف دیگر ، مجموع زاویه های ، $\hat{RQO} + \hat{RQP} = 90^\circ$ و همچنان مجموع زاویه های ، $\hat{RQP} + \hat{RPQ} = 90^\circ$ زیرا زاویه های داخلی یك مثلث مساوی است به 180° درجه ۰ از تحلیل های فوق الذکر داریم که : $\hat{A} = \hat{RPQ}$ فلهذأ :

$$\sin(A+B) = \frac{MP}{OP} = \frac{MR + RP}{OP} = \frac{NQ}{OP} + \frac{RP}{OP}$$

حال حد های آخری را باالترتیب به OQ و QP ضرب مینمأییم ،

$$\sin(A+B) = \frac{NQ}{OP} + \frac{RP}{OP} = \frac{NQ}{OQ} * \frac{OQ}{OP} + \frac{RP}{QP} * \frac{QP}{OP}$$

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B \quad \text{.... 5-1}$$

و همچنان ،

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B \quad \text{--- 5-2}$$

مثال اول : $\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ$

جواب $(\sqrt{2}/2)(\sqrt{3}/2) + (\sqrt{2}/2)(1/2) = (\sqrt{6} + \sqrt{2})/4 = 0.9659$

مثال دوم: با استفاده از فورمول های فوق الذکر، تابع $\sin 90^\circ$ را دریافت نمأیید؟

حل، مطابق فورمول فوق، $\sin(90^\circ) = \sin(60^\circ + 30^\circ) = \sin 60^\circ \cos 30^\circ + \cos 60^\circ \sin 30^\circ$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} * \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

بخاطر داشته باشید که $\sin(A+B) = \sin A + \sin B$ ، و همچو اشتباه صورت نگیرد ،

با امتداد دو فورمول گذشته، ما میتوانیم دو فورمول دیگر برای $\sin(A-B)$ و $\cos(A-B)$، نیز ثبوت نمأییم ،

$$\sin(A-B) = \sin(A+(-B)) = \sin A \cos(-B) + \cos A \sin(-B)$$

از طرف دیگر، میدانیم که $\cos(-B) = \cos B$ است و $\sin(-B) = -\sin B$ میباشد ،

فلهذأ،

$$\boxed{\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B} \quad ...... \quad 5-3$$

و همچنان دریافت کرده میتوانیم که

$$\boxed{\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B} \quad .... \quad 5-4$$

مثال اول: $\cos 16$ را از قرار، $\cos(45-30)$ دریافت نمأیید؟

حل: $\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \sin 30^\circ + \sin 45^\circ \cos 30^\circ$ (cos, sin, sin)

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} * \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} * \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = 0.9659$$ جواب

مثال دوم: قیمت افادهٔ ذیل را دریافت کنید؟ $\cos 23^\circ \cos 67^\circ - \sin 23^\circ \sin 67^\circ = ?$

حل، چون...... $\cos 23 \cos 67 - \sin 23 \sin 67$ مطابقت دارد به

جواب .... $\cos(23+67) = \cos 90 = 0$

حال که چار فورمول قبلی را استحصال نمودیم، میتوانیم که توابع مانند:

$\tan(A+B)$, $\cot(A+B)$, $\sec(A+B)$ and $\csc(A+B)$ را نیز بدست بیاوریم ، مگر این توابع آنقدر در موضوعات فزیك موارد استعمال ندارند ،

مثال سوم: مطابقت ذیل را ثبوت کنید که صدق میکند: $\sin(180^\circ + x) = -\sin x$

حل، $\sin(180+x) = \sin 180^\circ \cos x + \cos 180^\circ \sin x = (0)\cos x + (-1)\sin x = -\sin x$

لهذأ، $\sin(180^\circ + x) = -\sin x$

مثال چارم: نشان بدیهید که، $\frac{\sin(A-B)}{\sin A \sin B} = \cos B - \cot A$

حل،

$$\frac{\sin(A-B)}{\sin A \sin B} = \frac{\sin A \cos B - \cos A \sin B}{\sin A \sin B} = \frac{\sin A \cos B}{\sin A \sin B} - \frac{\cos A \sin B}{\sin A \sin B}$$

$$= \frac{\cos B}{\sin B} - \frac{\cos A}{\sin A} = \boxed{\cot B - \cot A}$$ جواب

مثال پنجم : نشان بدهید که :

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right) = 1/2(\cos x - \sin x)$$

حل ،

$$\sin(\pi/4+x)\cos(\pi/4+x) = [\sin(\pi/4)\cos x + \cos(\pi/4)\sin x][\cos(\pi/4)\cos x - \sin(\pi/4)\sin x]$$

$$= \sin(\pi/4)\cos(\pi/4)\cos x - \sin(\pi/4)\sin x\cos x + \cos(\pi/4)\sin x\cos x - \sin x\sin(\pi/4)\cos(\pi/4)$$

$$= \frac{2}{2}\,\frac{2}{2}\cos x - \left(\frac{2}{2}\right)\sin x\cos x + \left(\frac{2}{2}\right)\sin x\cos x - \frac{2}{2}\,\frac{2}{2}\sin x$$

$$= 1/2(\cos x) - 1/2(\sin x) = 1/2(\cos x - \sin x)$$

مثال ششم : نشان بدهید که $\sin(x+y)\cos y - \cos(x+y)\sin y = \sin x$

حل ، اگر ما $x+y=z$ **قرار بدهیم ، پس رابطهٔ فوق را چنین نوشته کرده میتوانیم** : $\sin z\cos y - \cos z\sin y$

این رابطه از قرار ، $\sin(z-y) = \sin z\cos y - \cos z\sin y$

چون ، $z=x+y$ **است و آنرا در رابطهٔ فوق تعویض مینمأییم ،** $\sin(x+y-y) = \sin x$

از تقسیم کردن فورمول (۱ ـ ۵) بر (۲ ـ ۵) ، ما میتوانیم که $\tan(A+B)$ **را دریافت نمأیم و همچنان از تقسیم کردن (۳ ـ ۵) بر (٤ ـ ۵) ، ما میتوانیم که فورمول** $\tan(A-B)$ **را به دست بیاوریم :**

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B} \quad \text{.............. 5--5}$$

$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\tan B} \quad \text{.............. 5 --- 6}$$

مثال : فورمول $\tan(A+B)$ **را ثبوت نمأیید .**

حل.

$$\tan(A+B) = \frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)} = \frac{\sin A\cos B + \cos A\sin B}{\cos A\cos B - \sin A\sin B}$$

حال ، اگر $\cos A\cos B$ **مساوی به صفر نبوده ، صورت و مخرج کسر فوق را به** $\cos A\cos B$ **تقسیم می نمأییم :**

$$\tan(A+B) = \frac{\dfrac{(\sin A)(\cos B)}{(\cos A)(\cos B)} + \dfrac{(\cos A)(\sin B)}{(\cos A)(\cos B)}}{\dfrac{(\cos A)(\cos B)}{(\cos A)(\cos B)} - \dfrac{(\sin A)(\sin B)}{(\cos A)(\cos B)}}$$

$$= \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B}$$ .... **جواب**

با داشتن سه فورمول (رابطه) ذیل، ما میتوانیم فورمول های کوفنکشن (cofunction) را نیز ثبوت نمأ ییم :

$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$ .... 5 - 7

$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$ .... 5 -- 8

$\tan(A \pm B) = \dfrac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$ .... 5 -- 9

فورمول های کوفنکشن (cofunction Formulas) :

$\cos(\pi/2 - u) = \sin u$, $\sin(\pi/2 - u) = \cos u$, $\tan(\pi/2 - u)\ \cot u$

ثبوت : فورمول کوفنکشن اولی را میتوانیم چنین ثبوت نمأییم :

$\cos(\pi/2 - u) = \cos(\pi/2)\cos u + \sin(\pi/2)\sin u$

$= (0)\cos u + (1)\sin u = \sin u$ جواب

0

به همین ترتیب میتوانیم دو فورمول دیگر را نیز ثبوت نمأییم .

﴿تمرین (۲ ــ ۵)﴾

مطابقت های ذیل را ثبوت نمأیید ؟

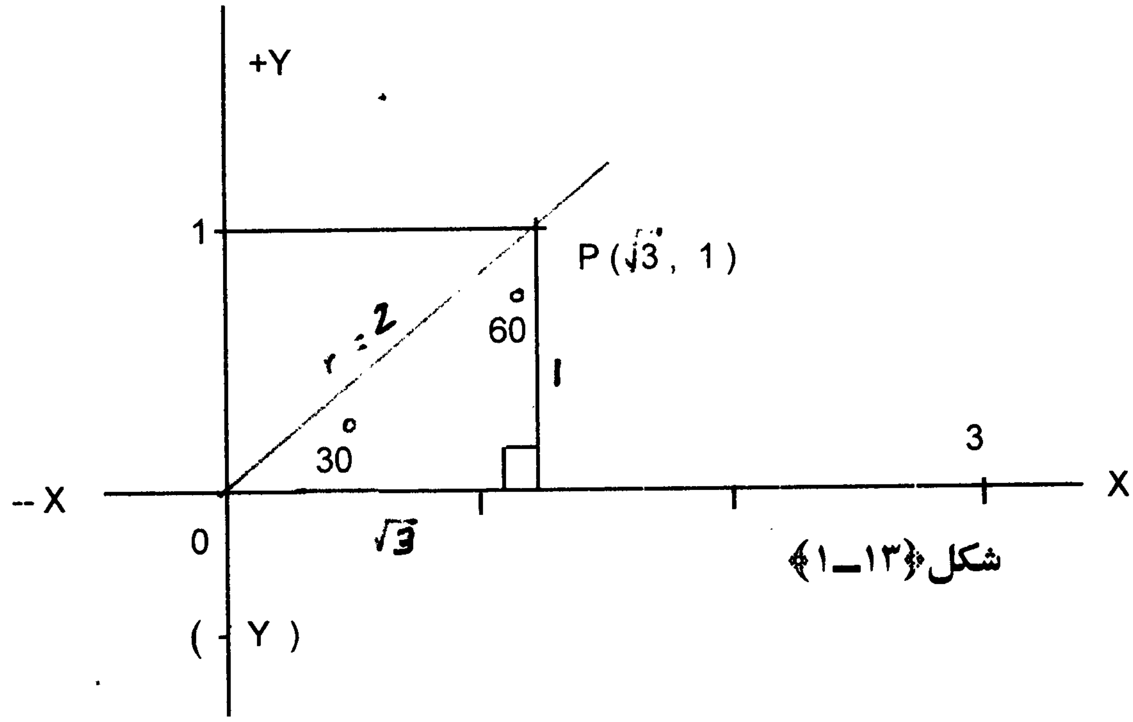
1. $\sin(x + \pi/2) = \cos x$
2. $\cos(x + \pi/2) = -\sin x$
3. $\cos(u + 3\pi/2) = \sin u$
4. $\sin(v + \pi/4) = (\sqrt{2}/2)(\sin v + \cos v)$
5. * $\tan(u + \pi/2) = -\cot u$
6. $[\sin(u + v)][\sin(u - v)] = \sin^2 u - \sin^2 v$
7. $\sin(u + v)/\sin(u - v) = (\tan u + \tan v)/(\tan u - \tan v)$
8. $\sin(270^\circ - x) = -\cos x$
9. $\cos(\pi/2 - x) = \sin x$
10. $\cos(30^\circ + x) = (\sqrt{3}\cos x - \sin x)/2$
11. $\cos(A + B) + \cos(A - B) = 2\cos A \cos B$
12. $\cos(x - y) + \sin(x + y) = (\cos x + \sin x)(\cos y + \sin y)$

ثبوت نمأیید ؟ : 13 ــ 1ـ با جمع کردن دو فورمول فوق (7 --- 5) ، مطابقت ذیل را ثبوت کنید؟

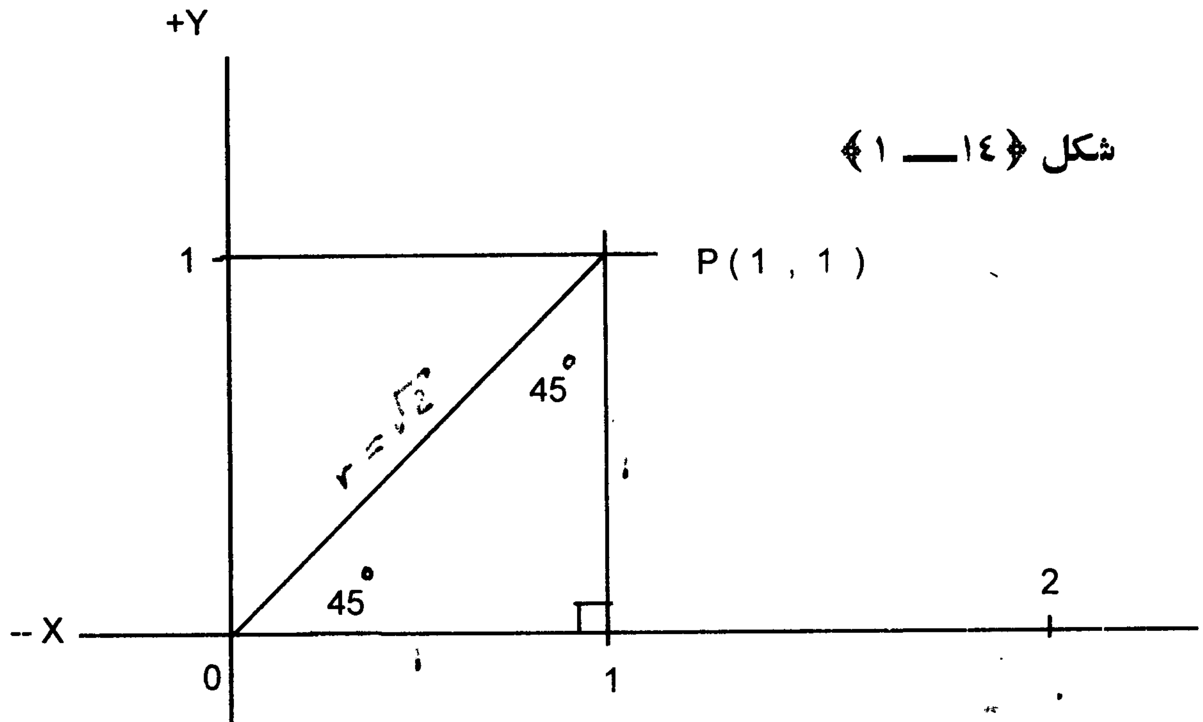
$\sin A \cos B = 1/2[\sin(A + B) + \sin(A - B)]$ .... 5 -10

14 - ۲ــ با جمع کردن دو فورمول فوق الذکر (8 --- 5) مطابقت ذیل را ثبوت کنید ؟

$\cos A \cos B = 1/2[\cos(A + B) + \cos(A - B)]$ ...... 5 -- 11



شکل﴿۱۳ــ۱﴾



شکل ﴿۱٤ــ ۱﴾

بطور خلاصه ، توا بع مثلثا تی زاویهٔ ها ی (0° , 30° , 45° , 60° , 90°) را به سهولت میتوان با استفا دهٔ علم هندسه و اندازه گیری اضلاع مثلث ها بدست بیاوریم ، در رابطه ، جدول ذیل طوری تر تیب و تحریر گردیده که برای حافظه آسانتر است٠ به خاطر داشته باشید که قیمت ها ی اعشاری آنها نیز داده شده است٠ :

Degree	0°	30°	45°	60°	90°	0°	30°	45°	60°	90°
sin	$\sqrt{0}/2$	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{4}/2$	0	0.5	0.707	0.86	1
cos	$\sqrt{4}/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{0}/2$	1	0.86	0.707	0.5	0

با مطالعهٔ دروس گذشته میتوان فور مولهای ذیل را خلا صه نمایم :

$\tan\theta = (\sin\theta)/\cos\theta$, $\cot\theta = (\cos\theta)/(\sin\theta)$

$\sec\theta = 1/(\cos\theta)$, $\csc\theta = 1/(\sin\theta)$

با استفادهٔ معادلات (2 -- 19) و (4 --- 19)، معادلهٔ ذیل را ثبوت نمائید؟

$$\sin A \sin B = 1/2 [\cos(A - B) - \cos(A + B)] \;\ldots\ldots\; 5 - 12$$

۱۵ ـــ در ذیل، مطابقت های متعدد دیگر نشان داده شده است که ایجاب ثبوت میکنند ۰ این مطابقت ها را در صورت ثبوت نمأیید که: $A + B = x$ و $A - B = y$ قرار داده شوند ۰ که در نتیجه آن $A = 1/2(x + y)$ و $B = 1/2(x - y)$ میشوند ۰ همچنان معادلات بدست آمده از آنها بقسم ضریب ها در ذیل نشان داده شده اند ۰

۱۵ ـــ با استفاده از معادلهٔ (10 -- 5) در صفحهٔ ۱۲۹، معادله های ذیل را ثبوت نمائید ـ

$$\sin x + \sin y = 2 \sin 1/2(x + y) \cos 1/2(x - y) \;\ldots\ldots\; 5 - 13$$

۱٦ ـــ با استفاده از (1 -- 5) و (3 -- 5)، و تعویض فوق ـــ معادلهٔ ذیل را ثبوت کنید؟

$$\sin x - \sin y = 2 \sin 1/2(x - y) \cos 1/2(x + y) \;\ldots\ldots\; 5 - 14$$

۱۷ ـــ با استفادهٔ معادلهٔ (11 -- 5)، و تعویض فوق، معادلهٔ ذیل را ثبوت نمائید؟

$$\cos x + \cos y = 2 \cos 1/2(x + y) \cos 1/2(x - y) \;\ldots\ldots\; 5 - 15$$

۱۸ ـــ با استفادهٔ معادلهٔ (12 -- 5) و تعویض فوق، معادلهٔ ذیل را ثبوت نمائید؟

$$\cos x - \cos y = -2 \sin 1/2(x + y) \sin 1/2(x - y) \;\ldots\ldots\; 5 - 16$$

﴿ فورمول، دو چندِ ـ زاویه ﴾

اگر ما زاویهٔ $A = B$ قرار بدهیم پس با استفادهٔ از معادلات 1 -- 5 و 2 -- 5 قبلی میتوانیم فورمول های دوـ چند زاویه را بدست بیاوریم ۰

$$\sin(A + A) = \sin 2A = \sin A \cos A + \cos A \cos A = 2 \sin A \cos A \;\ldots\; 5 - 17$$

و همچنان با استفادهٔ معادلهٔ (2 -- 5)، چنین نوشته کرده میتوانیم:

$$\cos(A + A) \cos A \cos A - \sin A \sin A = \cos^2 A - \sin^2 A \;\ldots\ldots\; 5 - 18$$

در نتیجه معادلات فوق را چنین خلاصه کرده میتوانیم:

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A \;\ldots\ldots\; 5 - 19$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A \;\ldots\ldots\; 5 - 20$$

یا

$$\cos 2A = 2\cos^2 A - 1 \;\ldots\ldots\; 5 - 21$$

$$\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A \;\ldots\ldots\; 5 - 22$$

مثال اول: اگر زاویهٔ $A = 30^\circ$ باشد پس: $\cos 2(30^\circ) = \cos 60^\circ = \cos^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ$

و اگر $A = 3x$ باشد، پس: $\sin 2(3x) = \sin(6x) = 2 \sin 3x \cos 3x$

باز هم اگر $2A = x$ باشد پس: $A = x/2$ $\quad \sin 2(x/2) = \sin x = 2 \sin(x/2) \cos(x/2)$

مثال دوم: با استفاده از فورمول دو ـ چند زاویه، افادهٔ مثلثاتی ذیل را ساده نمائید؟ $\cos^2 2x - \sin^2 2x$

جواب .... $\cos^2 2x - \sin^2 2x = \cos 2(2x) = \cos 4x$

مثال سوم : قیمت های $\sin 90^\circ$ و $\cos 90^\circ$ را از قرار داشتن توابع زاویهٔ 45 دریافت نمائید ؟

حل ،
$$\sin 90^\circ = \sin 2(45^\circ) = 2\sin 45^\circ \cos 45^\circ = 2\,(\sqrt{2}/2)(\sqrt{2}/2) = 1$$
$$\cos 90^\circ = \cos 2(45^\circ) = \cos^2(45^\circ) - \sin^2(45^\circ) = (\sqrt{2}/2)^2 - (\sqrt{2}/2)^2 = 0$$

مثال چارم : مطابقت ذیل را ثبوت نمائید ؟ $2/(1+\cos 2x) = \sec^2 x$

حل ،
$$2/(1+\cos 2x) = 2/[1+(2\cos^2 x - 1)] = 2/(2\cos^2 x) = \sec^2 x \ldots\ldots\ldots$$

مثال پنجم : نشان بدهید که مساوات ذیل صدق میکند ؟

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} + \frac{\cos 3x}{\cos x} = 4\cos 2x$$

حل ، طرف دست راست را همخرج میسازیم :

$$\frac{\sin 3x \cos x + \cos 3x \sin x}{\sin x \cos x}$$

از نتیجه فوق درک کرده میتوانیم که صورت کسر به شکل $\sin(A+x)$ بوده که $A = 3x$ میشود ، و همچنان مخرج کسر به شکل $(1/2)\sin 2x$ درک شده میتواند . حال قیمت های فوق را تعویض مینمائیم ،

$$\frac{\sin(3x+x)}{(1/2)\sin 2x} = \frac{2\sin 4x}{\sin 2x} \qquad \sin 4x = 2\sin 2x\cos 2x$$

$$\frac{2(2\sin 2x\cos 2x)}{\sin 2x} = 4\cos 2x \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{جواب}$$

مثال ٦ : با در نظر داشت فورمول های فوق الذکر ، $\cos 3\theta$ را از لحاظ $\cos\theta$ توضیح و تشریح نمائید ؟

$$\cos 3\theta = \cos(2\theta+\theta) = \cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta$$
$$= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - (2\sin\theta\cos\theta)\sin\theta$$
$$= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\cos\theta\sin^2\theta$$
$$= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\cos\theta(1-\cos^2\theta)$$
$$= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\cos\theta + 2\cos^3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

$$\tan 2A = \frac{\sin 2A}{\cos 2A} = \frac{2\sin A\cos A}{\cos^2 A - \sin^2 A} = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$$

مثال ۷ :

$$\boxed{\sin^2 A = \frac{1-\cos 2A}{2}}, \quad \boxed{\cos^2 A = \frac{1+\cos 2A}{2}}, \quad \boxed{\tan^2 A = \frac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A}}$$

مثا ل ۸ : مطا بقت ذیل را ثبوت نمائید ؟ $\sin^2 x \cos^2 x = 1/8(1 - \cos 4x)$

حل ، درین مورد مطابقت های قبلی : $\sin^2 x$ **و** $\cos^2 x$ **را بکار میبریم :**

$$\sin^2 x \cos^2 x = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right) = 1/4(1 - \cos^2 2x) = 1/4(\sin^2 2x)$$

حال ، از فورمول $\sin^2 2x = (1 - \cos 4x)/2$ **استفاده مینمائیم :**

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1/4\left(\frac{1 - \cos 4x}{2}\right) = 1/8(1 - \cos 4x)$$

طریقه دیگر این است که ، $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ **را بکار برده که در نتیجه آن** $\sin x \cos x = 1/2 \sin 2x$ **میشود**
حال هر دو طرف را مربع مینمائیم که ، $\sin^2 x \cos^2 x = 1/4(\sin^2 2x)$ **میشود**
بعد ازین نقطه ببعد همان طریقه قبلی را تعقیب مینمائیم

مثا ل ۸ : مطابقت ، $\cos^4 t$ **را به تابع دارای طاقت یك واحد تبدیل نمأیئد ؟**

$$\cos^4 t = (\cos^2 t)^2 = \left(\frac{1 + \cos 2t}{2}\right)^2 = 1/4(1 + 2\cos 2t + \cos^2 2t),$$

حال ، $\cos^2 u$ **را که** $u = 2t$ **باشد تعویض مینمائیم**

$\cos^2 u = (1 + \cos 2u)/2$

$$\cos^4 t = 1/4\left(1 + 2\cos 2t + \frac{1 + \cos 4t}{2}\right) = 3/8 + 1/2(\cos 2t) + 1/8(\cos 4t)$$

﴿ تمرین (۳ ــ ۵) ﴾

۱ ــــ توابع مثلثاتی زاویه های داده شده را تحت شرأیط وجه دریافت نمائید ؟ $\sin 60^\circ$ **را از قرار زاویهٔ** 30°
و $\sin 120^\circ$ **را از قرار زاویهٔ** 60° **دریافت کنید ؟**

۳ ــــ مطابقت های ذیل را ثبوت نمائید :

1. $\cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1$
2. $\sin 10t = 2 \sin 5t \cos 5t$
3. $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$
4. $4 \sin(x/2)\cos(x/2) = 2 \sin x$
5. $(\sin 2x)/(1 + \cos 2x) = \tan x$
6. $(\sin t + \cos t)^2 = 1 + \sin 2t$
7. $(1 - \tan^2 x)/(\sec^2 x) = \cos 2x$
8. $\sin 3u = \sin u(3 - 4\sin^2 u)$
9. $\cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2 0 + 1$
10. $\sec^2 x = \sec^2 x/(2 - \sec^2 x)$ . . . $\sec 2x = \cdots$
11. $(1 - \tan^2 t)/\sec^2 t = \cos 2t$
12. $2 \csc 2x \tan x = \sec^2 x$
13. $(\sin 3x/\sin x) - (\cos 3x/\cos x) = 2$
14. $\sin 3x = 3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x$
15. $2\sin^2 2t + \cos 4t = 1$
16. $\tan 3u = [(3 - \tan^2 u)\tan u]/(1 - 3\tan^2 u)$

﴿ فورمول های نصف ـ زاویه ﴾

اگر ما سه فورمول مثال ۷ ($\sin^2 A$ ، $\cos^2 A$ و $\tan^2 A$) که در درس گذشت ثبوت کردیم، آنرا دوباره یاد آوری نموده در این جا با تعیر زاویه تحریر کنیم چنین داریم: اگر زاویهٔ A را نصف نمأیم چنین نوشته کرده میتوانیم:

$$\sin A/2 = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}, \quad \cos A/2 = \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}, \quad \tan A/2 = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}}$$

اگر صورت و مخرج فورمول سوم فوق الذکر (فورمول $\tan A/2$) را به $1 + \cos A$ ضرب نمائیم چنین داریم:

$$\tan A/2 = \frac{1 - \cos A}{\sin A}, \quad \text{or,} \quad \tan A/2 = \frac{\sin A}{1 + \cos A}$$

مثال اول: با استفاده از فورمول فوق، $\sin 15^\circ$ درجه را دریافت نمائید؟

حل،

$$\sin 15^\circ = \sqrt{(1 - \cos 30^\circ)/2} = \sqrt{(1 - 0.8660)/2} = \boxed{0.2588}$$

از علامهٔ مثبت جذر استفاده شده است زیرا زاویهٔ 15° درجه در ربع اول قرار دارد.

مثال دوم: با استفاده از فورمول فوق، $\sin 57^\circ$ را دریافت نمائید؟

حل،

$$\sin 57^\circ = \sqrt{(1 - \cos 114^\circ)/2} = \boxed{0.8387}$$

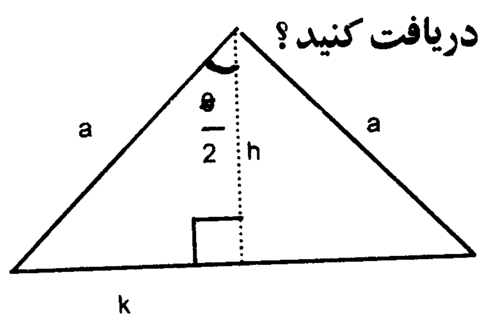
مثال سوم: افادهٔ ذیل را ساده نمائید؟ $\sqrt{18 - 18\cos 4x} = ?$

حل،

$$\sqrt{18 - 18\cos 4x} = \sqrt{9(2)(1 - \cos 4x)} = 3\sqrt{2(1 - \cos 4x)} = 3\sqrt{[4(1 - \cos 4x)/2} = \boxed{6\sin 2x}$$

صورت و مخرج به 2 ضرب شده است.

مثال چارم: یك مثلث متساوی الساقین داریم که زاویهٔ بین دو ضلع مساوی آن θ بوده و اضلاع مساوی آن a اند شکل ذیل را ملاحظه فرمائید. مساحت این مثلث را از وجه ضلع a وزاویهٔ θ دریافت کنید؟



حل ـ میدانیم که مساحت این مثلث مساوی است به $A = hk$

مطابق مثلث داریم، $\sin\theta/2 = k/a \quad \cos\theta/2 = h/a$

و از طرف دیگر، $k = a\sin\theta/2 \quad h = a\cos\theta/2$

$$A = kh = (a\sin\theta/2)(a\cos\theta/2) = a^2 \sin(\theta/2)\cos(\theta/2)$$

$$A = a^2\sqrt{[(1 - \cos\theta)/2\ ][(1 + \cos\theta/2)\ ]} = a^2\sqrt{(1 - \cos^2\theta)/4} = a^2\sqrt{\sin^2\theta/4} = \boxed{1/2\, a^2 \sin\theta}$$

﴿ تمرین (۴ ــ ۵) ﴾

مطابقت های مثلثاتی ذیل را ثبوت نمائید ؟

1. $\sin(A/2) = (1 - \cos A) / [(2 \sin(A/2))]$
2. $2 \sin^2(x/2) + \cos x = 1$
3. $\cos(\theta/2) = \sin\theta / [2 \sin(\theta/2)]$
4. $2 \sin^2(x/2) - \cos^2(x/2) = (1 - 3 \cos x)/2$
5. $\sqrt{(1 - \cos t)^2 + (\sin^2 t \cos^2 u) + \sin^2 t \sin^2 u} = 2 \sin(t/2)$
6. $\tan(A/2) = \sin A / (1 + \cos A)$

﴿ فورمول های حاصل ضرب و ضریب ﴾

الف ــ فورمول های حاصل ضرب :

از خلال ثبوت هایی مطابقت های دروس گذشته ، فورمول های حاصل ضرب را خلاصه می نمائیم :

$$\sin(u+v) + \sin(u-v) = 2 \sin u \cos v$$
$$\sin(u+v) - \sin(u-v) = 2 \cos u \sin v$$
$$\cos(u+v) + \cos(u-v) = 2 \cos u \cos v$$
$$\cos(u-v) - \cos(u+v) = 2 \sin u \sin v$$

مثال اول : این دو افاده را بقسم جمع تبدیل نمائید ؟

(a) $\sin 4\theta \cos 3\theta$ (b) $\sin 3x \sin x$

حل ، جهت حل مطلب ، $u = 4\theta$ و $v = 3\theta$ قرار میدهیم : $2 \sin 4\theta \cos 3\theta = \sin(4\theta + 3\theta) + \sin(4\theta - 3\theta)$

a $\sin 4\theta \cos 3\theta = \boxed{1/2 \sin 7\theta + 1/2 \sin\theta}$ .... **جواب**

b $2 \sin 3x \sin x = \cos(3x - x) - \cos(3x + x)$

$\sin 3x \sin x = \boxed{1/2 \cos 2x - 1/2 \cos 4x}$ .... **جواب**

حال ، اگر در چار مطابقت قبلی بعضی تغیرات وارد شوند ، یعنی $u + v = a$ و $u - v = b$ قرار بدهیم ، چنین نوشته کرده میتوانیم :

$(u+v)+(u-v) = a+b ,$ **یا** $u = (a+b)/2 ,\ v = (a-b)/2$

لهذا ، با این تغیرات میتوانیم چار مطابقت قبلی به شکل دیگری نیز درآوریم ----- که عبارت اند از :

فورمول های ضریب ؛

$$\sin a + \sin b = 2 \sin[(a+b)/2][\cos[(a-b)/2]$$
$$\sin a - \sin b = 2 \cos[(a+b)/2][\sin[(a-b)/2]$$
$$\cos a + \cos b = 2 \cos[(a+b)/2][\cos[(a-b)/2]$$
$$\cos b - \cos a = 2 \sin[(a+b)/2][\sin[(a-b)/2]$$

Appendexes

مثا ل اول: افادهٔ ذیل را بقسم حاصل ضرب توضیح و تشریح نما ئید؟ $\sin 5x - \sin 3x$

حل، جواب .... $\sin 5x - \sin 3x = 2\cos\,(5x+3x)/2\,[\sin(5x-3x)/2] = \boxed{2\cos 4x \sin x}$

مثال دوم: مطابقت ذیل را ثبوت نما ئید:

$$\frac{\sin 3t + \sin 5t}{\cos 3t - \cos 5t} = \cot t$$

حل،

$$\frac{\sin 3t + \sin 5t}{\cos 3t - \cos 5t} = \frac{\{2\sin[(3t+5t)/2]\}\{[\cos[(3t-5t)/2]\}}{\{2\sin[(5t+3t)/2]\}\{[\sin[(5t-3t)/2]\}}$$

$$= \frac{2\sin 4t \cos(-t)}{2\sin 4t \sin t} = \cos(-t)/\sin t$$

$$= \cos t/\sin t = \boxed{\cot t} \text{ .... جواب}$$

مثا ل سوم: افادهٔ مثلثاتی ذیل را از قرار تابع θ تشریح نمائید ؟ $\sin(\theta - 3\pi/2)$ و $\cos(\theta+\pi)$

حل، $\sin(\theta - 3\pi/2) = \cos\theta\cos(3\pi/2) - \cos\theta\sin(3\pi/2) = \sin\theta(0) - \cos\theta(-1) = \boxed{\cos\theta}$

$\cos(\theta+\pi) = \cos\theta\cos\pi - \sin\theta\sin\pi = \cos\theta(-1) - \sin\theta(0) = \boxed{-\cos\theta}$

تمرین (۵ ــ ۵)

۱ ــــ افاده های ذیل را بقسم جمعی ، تفا ضلی و یا حاصل ضرب تشریح نما ئید؟

1. $2\sin 9\theta \cos 3\theta$
2. $\sin 7\theta \sin 3\theta$
3. $\cos(6u)\cos(-4u)$
4. $3\cos x \sin 2x$
5. $\sin 6\theta + \sin 2\theta$
6. $\cos 5x - \cos 3x$ ==> بقسم حاصل ضرب

۲ ــ مطابقت های ذیل را ثبوت نما ئید؟

1. $\dfrac{\sin 4t + \sin 6t}{\cos 4t - \cos 6t} = \cot t$

2. $\dfrac{\sin u + \sin v}{\cos u + \cos v} = \tan\{(u+v)/2\}$

3. $\dfrac{\sin u - \sin v}{\sin u + \sin v} = \dfrac{\tan[1/2(u-v)]}{\tan[1/2(u+v)]}$

4. $\sin 2x + \sin 4x + \sin 6x = 4\cos x \cos 2x \sin 3x$

5. $(\sin ax)(\cos bx)$ .... بقسم جمع تبدیل نمائید

6. $\sin(\theta+\pi) = -\sin\theta$ .... ثبوت کنید

7. $\tan(\pi-\theta) = -\tan\theta$ .... ثبوت کنید

﴿سوالات فصل پنجم﴾

۱ ــ قیمت های توبع ذیل مطابق شرایط داده شدهٔ آن دریافت نمائید ؟

1 $\sin 120^\circ = ?$, $(90^\circ + 30^\circ)$ از طریق جمع زاویه های ۹۰ درجه و ۳۰ درجه

2 $\sin 135^\circ = ?$, $(180^\circ - 45^\circ)$ 3. $\cos 180^\circ = ?$, $[180^\circ = 2(90^\circ)]$

4. $\sin 45^\circ = ?$, $[45^\circ = 1/2\,(90^\circ)]$

۲ ــ افاده های ذیل را ساده نمائید ؟

5. $\sin 3x \cos 3x + \cos 2x \sin 3x$ 6. $8 \sin 6x \cos 6x$ 7. $2 - 4 \sin^2 6x$

8. $\sqrt{2 + 2\cos 2x}$

۳ ــ افاده های ذیل را نخست ، با استفاده فورمول ها ی مربوط خلاصه نموده بعداً ذریعهٔ کلکولیتر دریافت کنید ؟

9. $\sin 14^\circ \cos 38^\circ + \cos 14^\circ \sin 38^\circ$ 10. $2 \sin 46^\circ \cos 46^\circ$ 11. $\sqrt{(1 + \cos 12^\circ)/2}$

12. $1 - 2 \sin^2 82^\circ$

٤ ــ مطابقت های ذیل؛ را ثبوت نما ئید ؟

13. $\sec y / \csc y = \tan y$ 15. $\sin x(\csc x - \sin x) = \cos^2 x$ 16. $1/\sin\theta - \sin\theta = \cot\theta \cos\theta$

17. $\cos x \cot x + \sin x = \csc x$ 18. $(\sin^4 x - 1)/\tan^2 x = 2 + \tan^2 x$

19. $2 \csc 2x \cot x = 1 + \cot^2 x$ 20. $\cos^8 A - \sin^8 A = (\cos^4 A + \sin^4 A)\cos 2A$

21. $(1 - \sin^2\theta)/(1 - \cos^2\theta) = \cot^2\theta$ 22. $(\cos 2x)/(\cos^2 x) = 1 - \tan^2 x$

23. $\sin(\theta/2)\cos(\theta/2) = (\sin\theta)/2$ 24. $\sec x + \tan x = \cos x/(1 - \sin x)$

25. $\cos(x - y)\cos y - \sin(x - y)\sin y = \cos x$, 26. $\sin 4x(\cos^2 2x - \sin^2 2x) = (\sin 8x)/2$

27. $\sin x/(\csc x - \cot x) = 1 + \cos x$, 28. $\cos x - \sin(x/2) = (1 - 2\sin(x/2))(1 + \sin(x/2))$

29. $[\sin(x + y) + \sin(x - y)]/[\cos(x + y) + \cos(x - y)] = \tan x$

30. $\sec(x/2)\csc(x/2) = 2[\sin(x/2) + \cos(x/2)]/\sin x$

﴿مثال های کمکی﴾

مثال اول : ثبوت کنید ؟

1.

$\sec(A/2) + \csc(A/2) = [2\{\sin(A/2) + \cos(A/2)\}]/\sin A$

$\sin A = 2\sin(A/2)\cos(A/2)$

$[2\{\sin(A/2) + \cos(A/2)\}]/[2\sin(A/2)\cos(A/2)] = [\sin(A/2)]/[\sin(A/2)\cos(A/2)]$
$+ [\cos(A/2)]/[\sin(A/2)\cos(A/2)] = [1/\cos(A/2)] + 1/[\sin(A/2)] =$ **$\sec(A/2) + \csc(A/2)$**

2.

$\sec(A/2) = 1/[\cos(A/2)] = \pm 1/\sqrt{(1 + \cos A)/2} = \pm\sqrt{2/(1 + \cos A)}$

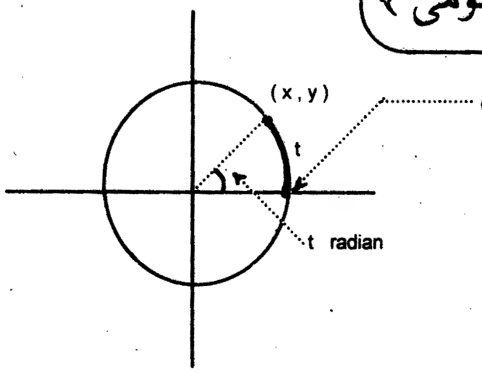
3.

$2\cos^2(x/2) - \cos x = 1$, $2[(1 + \cos x)/2] - \cos x = 1 + \cos x - \cos x = 1$

﴿ جدول فورمول های عمومی ﴾

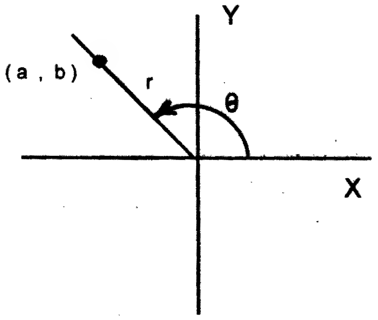
توابع مثلثاتی ---

(الف) برای اعداد حقیقی :



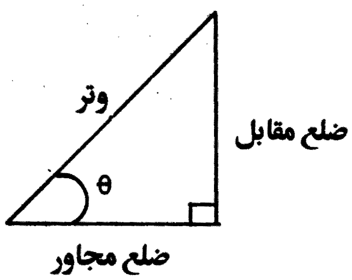
$\sin t = y$	$\csc t = 1 / y$
$\cos t = x$	$\sec t = 1 / x$
$\tan t = y / x$	$\cot t = x / y$

(ب) برای زاویه های کیفی :



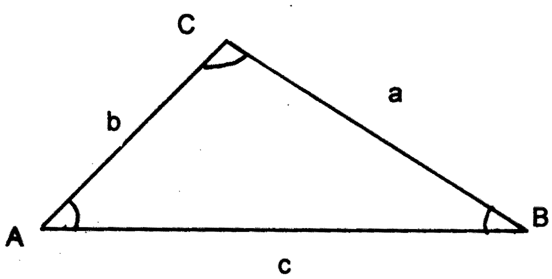
$\sin \theta = b / r$	$\csc \theta = r / b$
$\cos \theta = a / r$	$\sec \theta = r / a$
$\tan \theta = b / a$	$\cot \theta = a / b$

(ج) برای زاویه های حا ده :



$\sin \theta = \dfrac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}$	$\csc \theta = \dfrac{\text{وتر}}{\text{ضلع مقابل}}$
$\cos \theta = \dfrac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}$	$\sec \theta = \dfrac{\text{وتر}}{\text{ضلع مجاور}}$
$\tan \theta = \dfrac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}$	$\cot \theta = \dfrac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}}$

(د) مثلث کیفی



۱ــ **قانون ساین** (Law of sines)

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

۲ــ **قانون کوساین** (Law of cosines) ←

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cos C$$

۳ــ **مساحت** (Area, A) یک مثلث کیفی

$$A = 1/2\,(ab \sin C) = 1/2\,(bc \sin A) = 1/2\,(ac \sin B)$$

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad s = 1/2\,(a+b+c)$$

(I)

مطابقت های اساسی یا بنیادی مثلثاتی :

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

فورمول ها برای زاویه های منفی :

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta, \qquad \cos(-\theta) = \cos\theta \qquad \tan(-\theta) = -\tan\theta$$

فورمول ها برای جمع زاویه ها :

$$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B, \qquad \cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B}$$

فورمول ها برای تفاضل زاویه ها :

$$\sin(A-B) = \sin a\cos B - \cos A\sin B \quad , \qquad \cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$$

$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\tan B}$$

فور مول ها برای دو چند زاویه :

$$\sin 2A = 2\sin A\cos A$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$$
$$= 1 - 2\sin^2 A$$
$$= 2\cos^2 A - 1$$

$$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$$

فورمول های نصف زاویه :

$$\left|\sin(A/2)\right| = \sqrt{\frac{1-\cos A}{2}} \qquad \left|\cos(A/2)\right| = \sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$$

$$\tan(A/2) = \frac{1-\cos A}{\sin A} = \frac{\sin A}{1+\cos A}$$

$$\sin^2 A = \frac{1-\cos 2A}{2} \qquad \cos^2 A = \frac{1+\cos 2A}{2}$$

$$\tan^2 A = \frac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A}$$

فورمول های کوفنکشن (cofunction formulas):—

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right) = \cos A \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right) = \sin A \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} - A\right) = \cot A$$

فورمول های حاصل ضرب : —

$$2\sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B) \qquad 2\cos A \sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$$

$$2\cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B) \qquad 2\sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$$

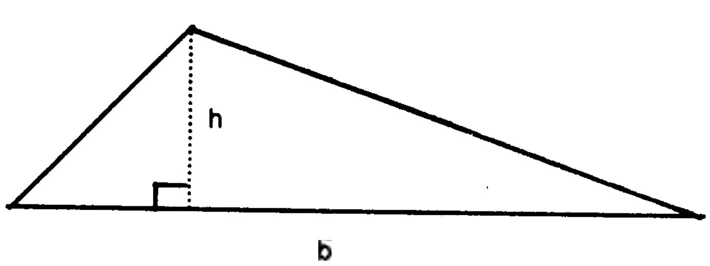
فورمول های ضریب : —

$$\sin A + \sin B = 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) \qquad \sin A - \sin B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) \qquad \cos A - \cos B = -2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

﴿ فورمول های، مساحت ، محیط ، حجم و مساحت سطحی ﴾

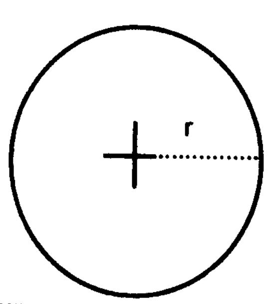
(الف) مثلث : —



$A = 1/2\,(b\,h)$

A ====> مساحت

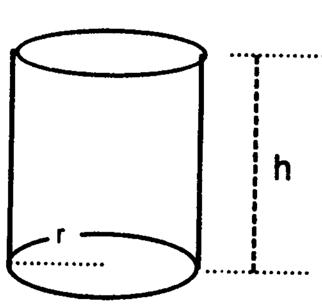
(ب) دائره : —



$A = \pi r^2 \qquad C = 2\pi r$

A ===> مساحت ، C =====> محیط

(ج) استوانه : —



$V = \pi r^2 h \qquad S = 2\pi r h$

V=====> حجم ـ S ===> مساحت سطحی

قیمت های توابع مثلثاتی به کمك علم هندسه به شکل ترسیم کردن زریعه نقاله و خطکش (Scale) انجینری دریافت شده میتواند • اما این کار ازیك طرف بسیار دقیق نخوا هد بود ، و از طرف هم وقت ذیاددر بر میگیرد • قیمت های بسیا ر دقیق تر با استفادهٔ کلکولس (Calculus) وریا ضیات عالی محاسبه میشوند ، که در جد اول به دسترس ما گذاشته میشو ند • به خاطر باید داشت که با بروز تیکنا لوژی مدرن ، تمام توابع مثلثاتی در کلکو لیترها و کمپیو تر ها گنجانیده شده است • شما میتوانید قیمت های توابع تمام زاویه ها را ذ ریعه کلکو لیتر ساینسی ویا کمپیو تر دریافت کنید • در کلکو لیتر ها میتوانید زاویه های که به سیستم اعشاری مشخص باشند ، توابع آنها را راساً توسط استعمال درست کلکو لیتر دریافت کنید • اما در جداول مثلثاتی ، کتب ریاضی و مثلثات زاویه ها عموماً به درجه ، دقیقه و ثانیه نشان داده شده اند • توابع مثلثاتی زاویهٔ هایکه به اعشاریه ارأیه شده باشند، نمیتوان از جداول بدست آورد • وقتیکه توسط کلکو لیتر توابع مثلثا تی یك زاویه را دریافت میکنید ، چنین عمل را با ید انجام داد:

برای آنکه ($\tan\theta$, $\cos\theta$, $\sin\theta$) رابا کلکو لیتر ساینسی دریافت میکنیم ، لا زم است نخست کلکولیتر را به واحد دلخوا خود ، (Degree) اعیار کنید • بعداً زاویه مطلوب را در کلکو لیتر راجستر کنید ، و بعداً با الترتیب دکمه های مورد نظر : - - (tan , cos , sin) را فشار بدیهید • که در نتجه در صفحهٔ کلکو لیتر (کلکین کلکو لیتر) قیمت تابع مطلوب ظا هر میگردد •

مثال : توسط کلکو لیتر ($\sin 37^\circ$) را دریافت کنید ؟

حل : نخست عدد (37) را در کلکو لیتر راجستر نما ئد ، بعداً دکمهٔ (sin) فشار بدیهید ، اگر واحد کلکو لیتر به درجه قبلاً اعیار شده باشد ، در صفحهٔ کلکو لیتر عدد (0.601815) که عبارت از ($\sin 37^\circ$) بوده ، ظاهر میشود • قبل از ایجاد کلکو لیتر ، توابع مثلثاتی زریعهٔ سلا ید رول (Slide Rule) دریافت میگردید • حتی طرز استعمال سلا ید رول در پو هنځی های انجینری ومکا تنب تخنیکی ، بحیث یك مضمون جدا گانه تدریس میشد - در سال (1976) در پو هنځی انجینریی — پو هنتون کا بل ، سلا ید رول به حیث یك مضمون تدر یس میشد • قبل از ایجا د سلا ید رول ، کلکو لیتر ویا کمپیو تر ، قیمت های توابع مثلثاتی از جد اول مثلثا تی دریافت میشد که همین پروسه هنوز هم دوام دارد • بیبا ئد طرز استعمال جداول مثلثاتی که آسا نتر ین و ارزآنتر ین طریقه است مورد بحث قرار بدیهیم • جداول مثلثاتی عموماً به واحد درجه ، و اجزأی آن ، به دقیقه و ثانیه ترتیب، و تنظیم گردیده است • در ضمیمهٔ اول این کتاب جدول مثلثاتی برای زاویه های : ($90^\circ - 0^\circ$) گنجا نیده شده است • این جدول به ترتیب تنظیم گردیده است که زاویهٔ های : ($45^\circ - 0^\circ$) به طرف چپ درج گردیده و هم از طرف چپ خوانده میشود • قیمت ها ی تو ابع مثلثاتی از با لا به پا ئین خوانده میشوند • در حالیکه زاویه های ($90^\circ - 45^\circ$) بطرف راست جدول درج است که قیمت های توابع مثلثاتی آنها از پائین بطرف بالا خوانده میشوند •

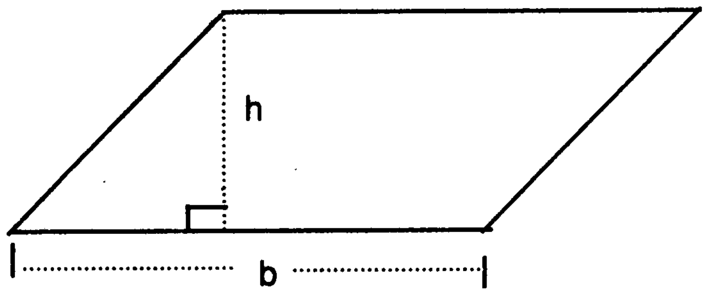
مثال اول : ($\tan 42^\circ 20'$) و ($\sin 64^\circ 40'$) را از جدول دریافت کنید ؟

حل : چون زاویهٔ ($42^\circ 20'$) از (45°) کمتر است ، لذا بطرف چپ جدول درج است • نخست زاویهٔ مطلوب را پیدا کرده بعداً از طرف بالا به پا ئین عدد مقابل زاویهٔ مطلوب را نشانی میکنیم که درین صورت عبارت از : ($\tan 42^\circ 20' = 0.9110$) است • حال چون زاویهٔ ($64^\circ 40'$) از (45°) بز رگتر است ، لذا بطرف راست جدول درج بوده و از پا ئین به بالا خوانده میشود - زاویهٔ ($64^\circ 40'$) را از طرف راست جدول پیدا میکنیم و از پا ئین به طرف بالا (sin) را به زاویهٔ مطلوب منطبق مینما ئیم که عبارت است از : ($\sin 64^\circ 40' = 0.9038$) •

مثال دوم : زاویهٔ (θ) را دریافت کنید که ($\tan\theta = 2.378$) داده شده باشد ؟

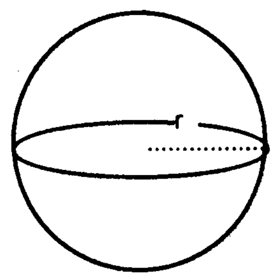
حل : ما در ستون (tan) جستجو مینمائیم تا عدد (2.378) و یا نزدیکترین آنرا پیدا کنیم • و بعداً می بینیم که این قیمت در مقابل کدام زاویه موقعیت دارد ، به هر زاویهٔ که تطابق نمود همان زاویهٔ مطلوب است، که درین مثال ، ($\theta = 67^\circ 10'$) است •

(د) مساحت معین : ـــــ



$A = bh$ A ===> مساحت

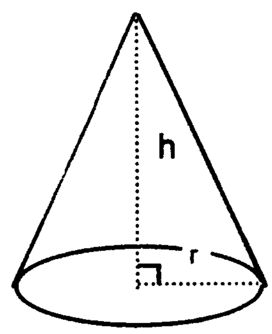
(ه) کره : ـــــ



$V = 4/3(\pi r^3)$ $S = 4\pi r^2$

V ====> حجم S ====> مساحت سطحی

(و) مخروط مستقیم دائره وی : ـــــ



$V = 1/3(\pi r^2 h)$ $S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$

V =====> حجم S ======> مساحت سطحی

﴿ معلومات راجع به نظام شمسی ﴾

سیاره Body	کتله Mass (Kg.)	شعاع Radius (m)	اوسط فاصله از آفتاب Mean distance from sun (m)
Sun	1.99×10^{30}	6.9×10^{8}	------
Mercury	3.28×10^{23}	2.42×10^{6}	5.79×10^{10}
Venus	4.87×10^{24}	6.10×10^{6}	1.08×10^{11}
Earth	5.98×10^{24}	6.37×10^{6}	1.49×10^{11}
Moon	7.35×10^{22}	1.74×10^{6}	------------
Mars	6.46×10^{23}	3.37×10^{6}	2.28×10^{11}
Jupiter	1.90×10^{27}	6.99×10^{7}	7.78×10^{11}
Saturn	5.69×10^{26}	5.85×10^{7}	1.43×10^{12}

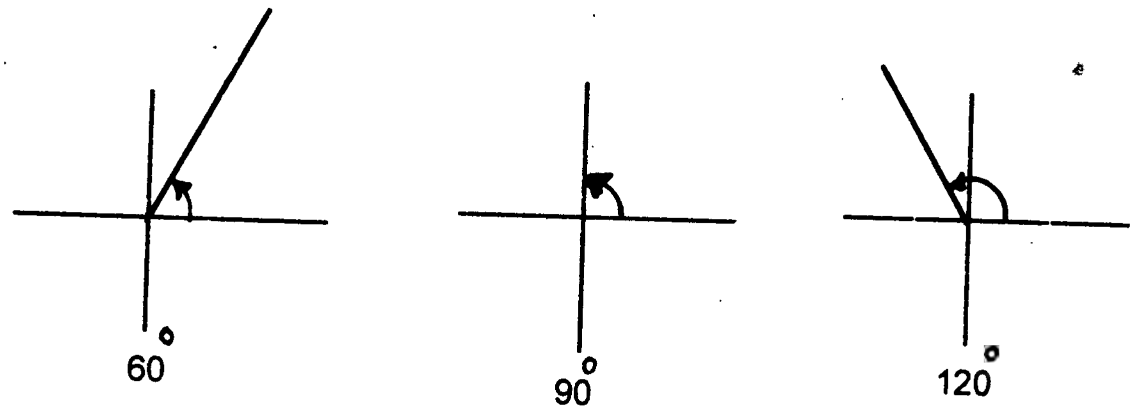
البته ، این معلومات مطابق جدول های فزیک ارایه گردیده تا صرف سیارات شناخته شدهٔ نظام شمسی از نقطهٔ نظر وزن و جسامت با هم دیگر مقایسه شوند ـ این قیمت ها نه باید % 100 صحیح فکر شوند (وا للّه اعلم) ـ .
علم مثلثات در مورد دریافت کردن شعاع زمین ویا دیگر سیاره ها فورمول های خا ص دارند .

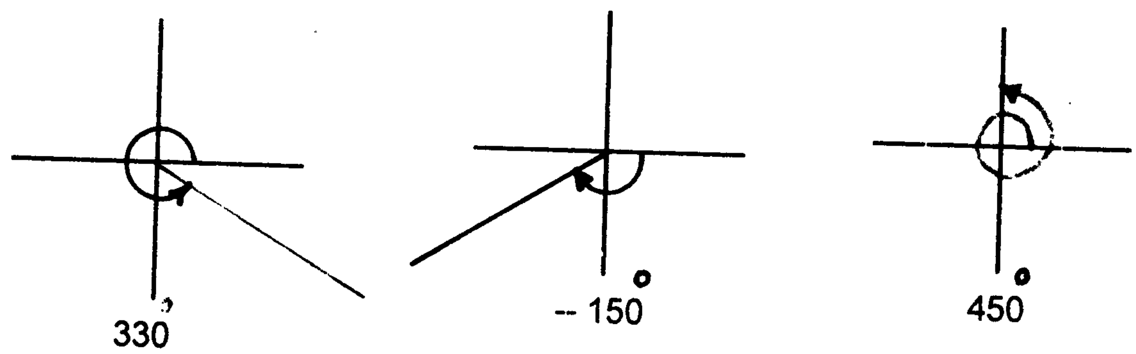
(۱۴۶) → (140)

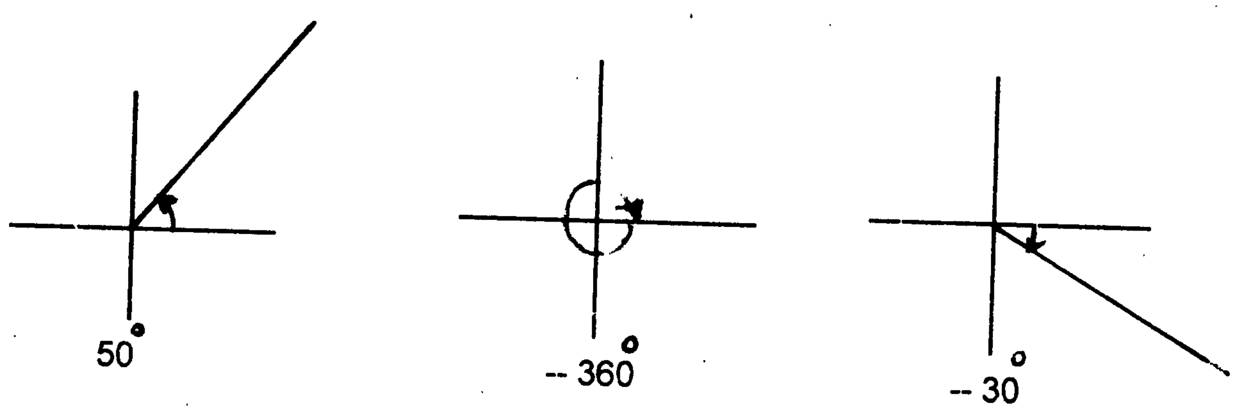
﴿جوا با ت تمرینا ت﴾

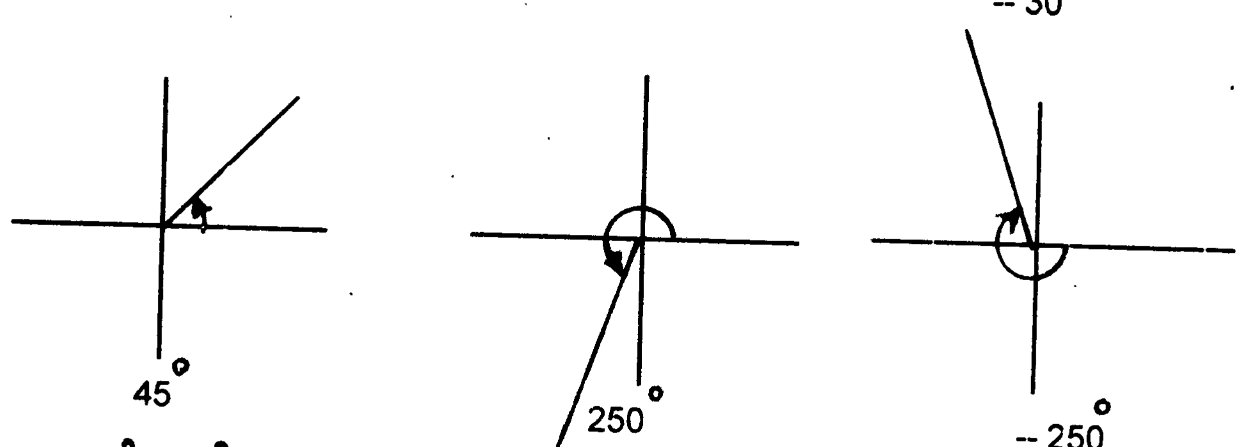
فصل اول : ـــ توابع مثلثاتی

تمرین (۱ ـــ ۱) صفحهٔ ---- (۵)

1 

2 

3 

4 

5. $405^\circ, -315^\circ$, 6. $433^\circ, -287^\circ$, 7. $510^\circ, -210^\circ$ 8. $522^\circ, -198^\circ$,

9. $430^\circ 30'$, $-289^\circ 30'$, 10. $513^\circ 47'$, $-206^\circ 13'$ 11. 638.1°, -81.9°

12. 557.6°, -162.4°

---

13. 15.2°, 14. 48.01°, 15. 82.91°, 16. 208.7°, 17. 15.2°, 18. 246.8°,

19. 86.05° 20. 157.65°, 21. 301.27°, 22. 4.78° 23. 96.13°

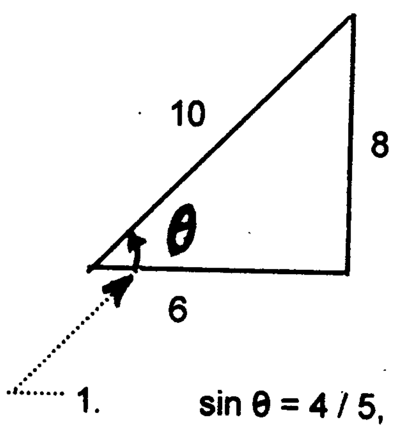
24. 38.47°

25. $47^\circ 30'$, 26. $215^\circ 48'$, 27. $19^\circ 45'$, 28. $84^\circ 33'$, 29. $5^\circ 37'$, 30. $238^\circ 13'$

31. $24^\circ 55'$, 32. $142^\circ 52'$ 33. (4, 2), 34. 34. (−3, 8),

35. (−3 , −5), 36. (6, −1), 37. (−7, 5), 38. (−4, −2), 39. (2,−5)

40. (1, 6) 41. 21.71°, 42. 7.27°, 43. $86^\circ 16' 26''$



تمرین (۲ـ۱) ------ صفحهٔ : (۱۰)

1. $\sin\theta = 4/5$, $\cos\theta = 3/5$, $\tan\theta = 4/3$, سه تابع دیگر را از طریق معکوس دریافت کنید
2. $\sin\theta = 12/13$, $\cos\theta = 5/13$, $\tan\theta = 12/5$, / / / /
3. $\sin\theta = 8/17$, $\cos\theta = 15/17$, $\tan\theta = 8/15$, / / / /
4. $\sin\theta = 7/25$, $\cos\theta = 24/25$, $\tan\theta = 7/24$, / / / /
5. $\sin\theta = 40/41$, $\cos\theta = 9/41$, $\tan\theta = 40/9$, / / / /
6. $\sin\theta = 30/34$, $\cos\theta = 16/34$, $\tan\theta = 30/16$, / / / /
7. $\sin\theta = \sqrt{15}/4$, $\cos\theta = 1/4$, $\tan\theta = \sqrt{15}$, / / / /
8. $\sin\theta = 2/\sqrt{7}$, $\cos\theta = \sqrt{3}/\sqrt{7}$, $\tan\theta = 2/\sqrt{3}$ / / / /
9. $\sin\theta = 1/\sqrt{2}$, $\cos\theta = 1/\sqrt{2}$, $\tan\theta = 1$ / / / /
10. $\sin\theta = 5/\sqrt{61}$, $\cos 0 = 6/\sqrt{61}$, $\tan\theta = 5/6$, / / / /
11. $\sin\theta = 2/\sqrt{29}$, $\cos\theta = 6/\sqrt{29}$, $\tan\theta = 2/5$, / / / /
12. $\sin\theta = 0.5/\sqrt{1.25}$, $\cos\theta = 1/\sqrt{1.25}$, $\tan\theta = 0.5$ / / /
13. $\sin\theta = 0.846$, $\cos\theta = 0.534$, $\tan\theta = 1.58$, / / / /
14. $\sin\theta = 0.808$, $\cos\theta = 0.588$, $\tan\theta = 1.373$, / / / /
15. $\sin\theta = 0.1521$, $\cos\theta = 0.534$, $\tan\theta = 1.58$, / / / /
16. $\sin\theta = 0.502$, $\cos\theta = 0.864$, $\tan\theta = 0.581$, / / / /
17. 5 / 13, 12 / 5 18. $\sqrt{3}/2$, 2, 19. $1/\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, 20. $\sqrt{7}/3$, 3 / 4
21. 0.882, 1.33, 22. 0.954, 31.8, 23. 0.246, 3.94, 24. 1.807, 0.664,
25. $\sin\theta = 4/5$, $\tan\theta = 4/3$, 26. $\cos\theta = 5/15$, $\cot\theta = 5/12$,
27. $\tan\theta = 1/2$, $\sec\theta = \sqrt{5}/2$, 28. $\csc\theta = \sqrt{13}/2$, $\cos\theta = 3/\sqrt{13}$,

$\tan\theta$ ← 32. $\cos\theta$, ← 31. $\cot\theta$, ← 30. $\sec\theta$, ← 29.

تمرین (۳ـ۱) --------- صفحهٔ ــــ 15

1. $\sin 40^\circ = 0.64$, $\cos 40^\circ = 0.77$, $\tan 40^\circ = 0.84$, $\cot 40^\circ = 1.19$, $\sec 40^\circ = 1.30$, $\csc 40^\circ = 1.50$
2. $\sin 75^\circ = 0.96$, $\cos 75^\circ = 0.26$, $\tan 75^\circ = 3.73$ زاویه های متباقی را از معکوس آنها دریافت کنید .
3. $\sin 15^\circ = 0.26$, $\cos 15^\circ = 0.97$, $\tan 15^\circ = 0.27$ / / / /
4. $\sin 53^\circ = 0.80$, $\cos 53^\circ = 0.60$, $\tan 53^\circ = 1.33$ / / / /

5. 0.38, 6. 0.300, 7. 0.844, 8. 0.587, 10. 0.9626, 10. 0.152

11. 0.9941, 12. 0.6855, 13. 0.4085, 14. 2.579,

15. 1.57, 16. 1.118,

17. 70.97°, 18. 67.96°, 19. 65.70°, 20. 87.55°, 21. 11.718°, 22. 6.29°,

23. 49.453, 24. 80.17°, 25. 53.44°, 26. 60.72°, 27. 81.787°,

28. 80.98°, 29. 0.3256, 30. 0.7313, 31. 2.394, 32. 0.2345,

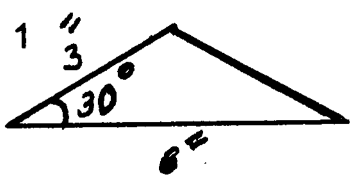
33. $40^\circ 10'$, 34. $66^\circ 34'$ 35. $82^\circ 50'$, 36. $56^\circ 43'$, 37. 0.5528, 38. 0.6596,

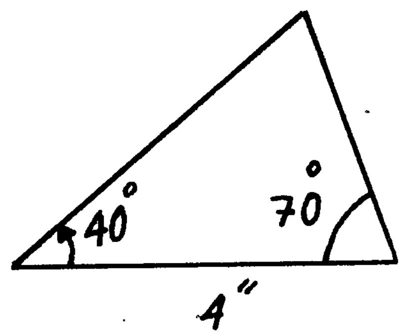
39. 0.8767, 40. 1.3367, 41. $72^\circ 47'$, 42. $1^\circ 54'$, 43. $35^\circ 8'$

44. $51^\circ 6'$, 45. 182 ft / sec 46. 8.53, 47. 71.11v. 48. 1.5134,

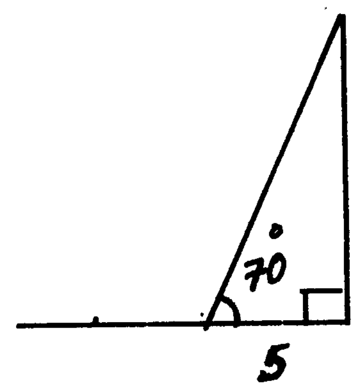
---

تمرين (٤ــ١) ـــــ صفحة ـــــ (١٩)

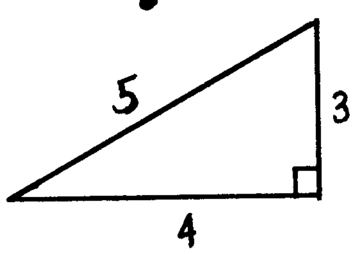
1




2



4



3

5. $B = 12.2^\circ$, b = 1415, c = 6850, 6. b = 8.5, a = 2.91, $B = 71.1^\circ$

7. $A = 25.8^\circ$, $B = 64.2^\circ$, b = 311, 8. $A = 48^\circ$, $B = 42^\circ$, b = 82.97

9. $A = 57.9^\circ$, a = 20.2, b = 12. 6, 10. c = 0.6236, a = 0.2704, $A = 25.7^\circ$

11. $A = 22.1^\circ$, a = 33.3, $B = 34.78^\circ$ 12. $A = 55.22^\circ$, c = 7205.5, $B = 34.78^\circ$

13. a = 30.21, $B = 57.90^\circ$, b = 48.16 14. a = 17.98, b = 4.0182, $A = 77.40^\circ$

15. $A = 52.15^\circ$, $B = 37.85^\circ$, c = 71.85 16. $B = 38.32^\circ$, $A = 51.68^\circ$, b = 7.83

17. $A = 52.5^\circ$, b = 0.661, c = 1.09 18. $C = 13.22^\circ$, $B = 37.4^\circ$, a = 10.502

19. $A = 15.82^\circ$, a = 0.5239, c = 1.922, 20. $B = 38.64^\circ$, c = 472.72, b = 295.18

21. $A = 65.89^\circ$, $B = 24.11^\circ$, c = 648.46 22. $A = 54.45^\circ$, $B = 77.025^\circ$, a = 4.14

23. a = 3.3621, $B = 77.025^\circ$, c = 14.974 24. c = 84244.32, b = 83916, $A = 5.058^\circ$

---

25. 4.45, 26. 40.24, 27. 41.3, 28. 27.74 29. 52°, $20'$, b = 0.684, c 1.12

30. c = 145.64, $B = 19\ 50$, b = 49.43, 31. $A = 58^\circ 40'$, a = 143, $B = 31^\circ 20'$

32. c = 7.17, $A = 72^\circ 48'$, $B = 17^\circ 12'$ 33. $a = c \sin A$, $b = c \cos A$, $B = 90^\circ - A$

34. $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\tan A = a / b$, $B = 90 - A$ 35. $A = 90 - B$, $b = a \tan B$, $c = a / \cos B$

سوالات عبارتی :ـــــ صفحهٔ ------ (۲۲)

1. 384 ft, 2. h = 5.58 m, 3. 9.50 ft, 4. 6.84 ft, 5. 0.38 6. θ = 21.56°
7. 260.6m 8. 852 cm, 9. 25.4 ft, 10. x = 2469.6ft, 11. 34.3
12. 51.26°, 13. 5.26 m, 14. 10. 11cm, 15. 1.29 m, 16. OA = 0.03824″
17. 8. 8, 18. 61.93° 19. 1080 mi, 20. 627.26 ft, 21. 8.199cm
22. Y = 8.5′, X = 12.14 ft, 23. θ = 103.34, 24. 27.92, 25. 29.831m
26. 40.55 ft, 27. 200 m 28. X = 7.956 m

سوالات فصل اول :ـــ --------- صفحهٔ ------- (۲۶)

1. 377°, −343° 2. 608.3°, −111.7°, 3. 142.5°, −577.5°
4. 352.4°, −367.6° 5. 31.9°, 6. 174.75°, 7. 38.1°, 8. 321.45°
9. 17°30′, 10. 65°24′, 11. 49°42′, 12. 126°42′, 13. sin θ = 7/25, cos θ = 24/25, tan θ = 7/24
14. sin θ = $4/\sqrt{41}$, cos θ = $5/\sqrt{41}$, tan θ = 4/5 15. sin θ = $1/\sqrt{2}$, cos θ = $1/\sqrt{2}$, tan θ = 1
16 sin θ = .5 / 1.3, cos θ = 1.2 / 1.3, tan θ = .5 / 1.2 17. 0.923, 2.40,
18. 0.9275, 2. 4733, 19. 0.447, 1.12 20. 0.2425 1.03 21. 0.952
22. 0.7627, 23. 1.853, 24. 0.7557, 25. 18.2°, 26. 39.08°
27. 57.57° 28. 82.27° 29. 1.636 30. 0.9917 31. 0.5664 32. 0.4411
33. 32°10′, 34. 51°39′ 35. 62°10′ 36. 6°1′ 37. a = 1.83, B = 73°, c = 6.27
38. c = 1164, b = 434, B = 21.9° 39. A = 51.5°, B = 38.5°, c = 104
40. A = 16°, b = 3.67, B = 74° 41. B = 52.5°, b = 15.6, c = 19.7
42. a = 12.13, b = 3.41, A = 74.3° 43. A = 31.61°, a = 4.006, B = 58.39°
44. B = 11.27°, c = 73.56, A = 78.73° 45. a = 0.6292, B = 44.33°, b = 0.5341
46. c = 5.70, a = 0.4348, B = 85.625° 47. A = 48.813°, B = 41.187°, b = 10.196
48. A = 40.35°, c = 1118, B = 49.65° 49. 44.4 N 50. 42.50 ft 51. 0.6120 um
52. 55.05 ma 53. 30.6 54. 42.20 55. 1.598 mi, 56. 485.44 in
57. 4820 ft 58. 503.32 ft 59. 3.12 60. 31.54 61. 47.2 ft
62. 14.36 ft 63. 0.184 km 64. 4.68 min 65. 24.94 66. 72
67. 155 in 68. 10.656 ft 69. 67.1 ft 70. 4813 m 71. 1.83 km
72. 0.336 73. 464 in 74. 1.14 m

تمرین (۲ــ۱) ------------ صفحهٔ ---------- (۳۲)

1. +, −, −, 2. −, −, −, 3. +, −, −, 4. +, +, − 5. +, +, +
6. +, +, − 7. +, −, + 8. −, −, + 9. sin θ = $1/\sqrt{5}$, cos θ = $2/\sqrt{5}$, tan θ = 1/2
10. sin θ = 1 / 2, cos θ = −1/ 2, tan θ = −1 11. sin θ = −3/ 13, cos θ = −2 / 13, tan θ = 3 /2
12. sin θ = −3 / 5, cos θ = 4 / 5, tan θ = −3 / 4 13. sin θ = 12 / 13, cos θ = −5 / 13, tan θ = −12/5
14. sin θ = −4 / 5, cos θ = −3 / 5, tan θ = 4 / 3 15. sin θ = $-2/\sqrt{29}$, cos θ = $5/\sqrt{29}$, tan θ = −3 / 5

16. $\sin\theta = 5/\sqrt{34}$, $\cos\theta = 3/\sqrt{34}$, $\tan\theta = 5/3$, 17. II 18. III 19. II 20. IV 21. IV
22. I 23. III 24. IV

تمرین (۲ـ۲) ------ فصل دوم ---------- صفحهٔ --------- (۳۸)

1. $\sin 20^\circ$, $-\cos 40^\circ$ 2. $-\tan 89^\circ$, $\cos 15^\circ$ 3. $-\tan 75^\circ$, $-\csc 58^\circ$
4. -10°, $-\cot 70^\circ$ 5. $-\sin 57^\circ$, $-\cot 6^\circ$ 6. $\sin 82^\circ$, $\sec 45^\circ$
7. $\cos 40^\circ$, $-\tan 40^\circ$ 8. $-\tan 20^\circ$, $\sin 10^\circ$ 9. $-\sin 15^\circ = -0.2588$
10. $-\tan 49^\circ = 1.1504$ 11. $-\cos 73.70^\circ = -0.2807$ 12. $\sin 76.60^\circ = 0.9728$
13. $\tan 39.15^\circ = 0.8141$ 14. $-\cos 10.82^\circ = -0.9822$ 15. $\sec 31.67^\circ = 1.175$
16. $-\cot 43.47^\circ = -1.0549$ 17. −0.5228, 18. 0.9478 19. −0.7620
20. 1.9358, 21. −0.3461 22. 0.2825 23. −3.910 24. −6.4279
25. 237.99°, 302.01° 26. 298.65°, 118.65° 27. 66.40°, 293.60°
28. 39.60°, 140.40° 29. 15.82°, 195.82° 30. 158.23°, 338.23° 31. 102°, 282°
32. 114.39°, 294.39° 33. 119.45° 34. 223° 35. 263.07° 36. 348.92°
37. 306.21° 38. 304.93° 39. 299.34° 40. 108.04° 41. −0.7003
42. −0.9063 43. −0.7771 44. −2.0561 45. $<$ 46. $>$
47. $=$ 48. $<$ 49. 27.71 lb 50. −93.96 51. 416
52. 7062 m 53. $\cos(-\theta) = x/r$, $\tan(-\theta) = -y/x$, $\sin(-\theta) = -y/r$
54. −0.8660, 0.9976 55. 5.671, −1.428 56. 1.5557, −1.7434

تمرین (۲ـ۳) ----- صفحهٔ ---------- (۴۵)

1. $\pi/12$, $5\pi/6$ 2. $\pi/15$, $5/4(\pi)$, 3. $5\pi/12$, $11\pi/6$
4, $2\pi/10$, $7\pi/4$ 5. $7\pi/6$, $3\pi/2$ 6. $4\pi/3$, $5\pi/3$ 7. $8\pi/9$, $13\pi/9$
8. $11\pi/30$, $35\pi/18$ 9. 72°, 270° 10. 54°, 150° 11. 10°, 315°
12. 84°, 240° 13. 170°, 300° 14. 55°, 225° 15. 15°, 17°
16. 42°, 48° 17. 3.66, 18. 0.95 19. 4.40 20. 1.82 21. 5.82
22. 2.94 23. 3.12 24. 1.50 25. 43° 26. 13.75° 27. 171.8°
28. 97.4° 29. 140.4° 30. 1970.97° 31. 939.7° 32. 5729.6° 33. 0.7071
34. 0.866 35. 3.732 36. −0.5 37. −0.866 38. 1.732 39. −8.327
40. 7.5660 41. 0.9056 42. 0.5972 43. −0.890 44. 0.3407 45. −0.479
46. 0.7185 47. −0.149 48. −10.75 49. 0.3141, 2.827 50. 0.4189, 5.8610
51. 2.932 52. −0.044, 6.236 53. 0.8309, 5.452 54. 1.0775, 4.2190
55. 2.442, 3.841 56. 0.2566, 2.885 57. 1.43π 58. a = 62.58 v, b = −100 v
59. 15.7 cm / s 60. 2.08 ft

تمرین (۳ـ۲) ----- صفحهٔ ---------- (۵۰)

1. 10.5 in 2. 1.65 ft 3. 52.4 in^2 4. 821 cm 5. 0.382 = 21.9
6. 5.42 in 7. 4240 8. 40906 ft 9. 0.52 rad / s 10. 12560 rad /min

11. 34.73 m^2 12. 367.17 in^2, 13. 0.262 ft 14. 22 mi 15. 129 km

16. 20.418 in 17. 5650 cm 18. 48.6 cm /sec 19. 25.7 ft 20. 59.81 m

21. 86.2 rad / sec 22. 1036.2 mi / hr 23. 3710 mi / hr 24. 28.66 rpm

25. -- 2.145 cm 26. 45.93 v 27. 5200 ft / min 28. 26.226 rpm

29. 2.60 X 10^{-6} rad / sec 30. 1.36 ft / sec 31. 25,100 ft / min 32. 16,855.52 m / min = 281 m / s

33. 69 cm 34. 58.9 ft 35. 4.848 X 10^{-6} 36. 1.7X10^{-5} 37. 7.13X10^{7} mi 38. 0.119

سوالات فصل دوم، ---- صفحهٔ ------- (۵۳)

1. $\sin\theta = 4/5$, $\cos\theta = 3/5$, $\tan\theta = 4/3$ 2. $\sin\theta = 5/13$, $\cos\theta = -12/13$, $\tan\theta = -13/12$

3. $\sin\theta = -2/\sqrt{53}$, $\cos 0 = 7/\sqrt{53}$, $\tan\theta = -2/7$ 4. $\sin\theta = -3/\sqrt{13}$, $\cos 0 = -2/\sqrt{13}$, $\tan 0 = 3/2$

5. -- cos 48°, tan 14° 6. -- sin 27°, cos 42° 7. -- sin 71°, sec 15°

8. -- cos 77°, -- sin 80° 9. $2\pi/9$, $17\pi/20$ 10. $\pi/8$, $9\pi/5$ 11. $4\pi/15$, $9\pi/8$

12. $3\pi/20$, $9\pi/10$ 13. 252°, 130° 14. 67.5°, 63° 15. 12°, 330°

16. 306°, 225° 17. 32.1° 18. 77.6° 19. 206.7° 20. 830.8° 21. 1.745

22. 5.323 23. 0.3534 24. 2.5897 25. 4.574 26. 0.3267 27. 2.38

28. 6.7265 29. --0.4147 30. 0.6248 31. --0.4678 32. 0.0699 33. --1.080

34. -- 9.3042 35. --0.4264 36. 0.8360 37. --1.638 38. 0.9705

39. 4.1398 40. --0.9528 41. -- 0.5878 42. --2.613 43. --0.866

44. --0.2679 45. 0.5569 46. 1.0368 47. 1.197 48. -- 0.5176

49. 10.30°, 190.30° 50. -- 68.80°, 201.20° 51. 118.23°, 241.77° 52. 39.90°, 219.90°

53. 0.5759, 5.707 54. 0.1047, 3.0369 55. 4.187, 5.238 56. 1.2322, 4.3738

57. 223.76° 58. 120.72° 59. 246.78° 60. 164.77° 61. --120 v 62. 11.93 m

63. 0.4292 ft 64. 130.25 in 65. 108 cm 66. 118.86 in 67. 188 in / sec

68. 0.464 ft 69. 18.98 cm 70. 637. 637 revelotion 71. 6.702 mm

72. 19.5 % 73. 84,800 cm /min 74. 38,622 in / min 75. 3.58 X 10^{5} km 76. 3.8 X 10^{3} mi

---

تمرین فصل سوم ------- صفحهٔ --------- (۵۹)

25. 10.20 lb <78.7° 26. 50.40 N < --10.9° 27. 21 ft / sec < 17° 28. 142.8 m / hr 29. 16.64mi <70°

30. 52.9 km < 19.10° 31. 30 N < 90° 32. 52.6 N < 48°

تمرین (۲ـ۳) ------ صفحهٔ ------ (۶۲)

1. Fx = 6.62.2, Fy = 352 2. Fx = -- 194, Fy = 724.4 3. -- 349. --664 4. 454, --494

5. 3.22, 7.97 6. -- 4426.4, -- 8687 7. -- 62.9, 44.1 8. 0.0437, --0.0896

9 2.08, -- 8.80 10. -- 14673, 6378 11. --2.53, -- 0.788 12. 62.6, 25.9 13. -- 0.8088, 0.3296

14. --379, -- 340 15. 88,920, 12,240 16. 952.5, --1534 17. 2040 km / hr , 951 km / hr

18. 32.77, 22.94 19. 43.4 lb, --13.7 lb 20. -- 0.243, 0.059 21. 115 km, 88.3 km

22. 4347, 1165 23. 18,530 mi / hr, -- 825.3 mi / hr 24. 160.5 lb

تمرین سوم ــــ ---------- صفحهٔ -------- (٦٦)

1. R = 24.2, θa = 52.6° 2. R = 623.3, θa = 18.23° 3. R = 7.781, θa 66.63° 4. R = 3725.2, θa = 62.3°
5. R = 10, θ = 58.8° 6. R = 103.6, θx = −30.13° 7. R = 2.79, θx = 111° 8. R = 758.4, θx = 196°
9. R = 2130, θx = 107.7° 10. R = 51.7, θx = 232.7° 11. R = 1.426, θx = 299.12 12. R = 9.93 θx = −40
13. R = 29.2, θ = 10.8 14. R = 247, θ = 68° 15. R = 47, θ = 101° 16. R = 25.08, θ = 240.65°
17. R = 27.27, θ = 33.14° 18. R = 1.044, θ 2.2° 19. R = 25.08, θ = 240.65° 20. R = 147.47, θ = −85°
21. R = 50.1, θ = 50.3° 22. R = 4156, θ = −13.30° 23. R = 233, θ = 124.5° 24. R = 41.08, 88.60°

سوالات عبارتی فصل سوم ــــ ---------- صفحهٔ (٦٨)

1. 81.5 ib, θ = 56.5° 2. 263.18 lb, θ 56.44° 3. 849 N, θ = 10.06° 4. 91.23, θ = 6.17°
5. 510 mi, θ = 28.1° 6. 91.94 km, θ = 56.21° 7. R = 37.79 mi, θ = 77.14° 8. 875.15 m, θ = 30.59°
9. 92 ft / s, θ = 51.6° 10. 3221.18 km / hr, θ = 28.16° 11. 31.6 lb, 71.6 12. T1 = T2 = 173.96 lb, 0=30
13 206 m /s, θ = 14° 14. v = 559.43 km / hr, θ = 84.2° 15. 34.8, 57.4 lb 16. θ = 15.67° 17. 71.3 lb
18. 9.6 lb 19. 128 m / s, θ = 20.2° 20. 492.44 ft, θ = 43.03° 22. 6.7 km, θ = 63.43°
23. 4.06 A/m, θ = 16.6° with magnet 24. 1.20 A / m, θ = 10.78°

تمرین (٥ــ٣) : ــــ ------ صفحهٔ ------ (٧٥)

1. b = 38, C = 66°, c = 46.1 2. a = 2.408, c = 4.757, B = 34° 3. a = 2800, b = 2620, C = 108°
4. b = 29.135, c = 94, A = 79.5° 5. B = 12.20°, A = 149.70, C = 9.57° 6. C = 49.53°, A = 61.13°, a = 3.392
7. a = 110.5, A = 149.70°, C = 9.57 8. A = 3.3406, B = 100.23°, b = 2535 9. A = 125.64°, a = 0.0776, c = 0.0056
10. A = 14.82°, b = 890.5, a = 186.46 11. A = 99.4°, b = 55.1, c = 24.4 12. C = 57.3°, c = 13.32, b = 14.6
13. A = 68.01°, a = 5520, c = 5276 14, c = 1155, C = 76.44°, A = 89.77°
15. A1 = 61.36°, C1 = 70.51°, c1 = 5.628, A1 = 118.64°, C2 = 13.23°, c2 = 1.366 16. A = 40.14°, B = 124.24°, b = 115
17. A1 = 107.3°, a1 = 5280, C = 41.3, A2 = 9.9°, a2 = 952, C2 = 138.7°
18. B = 72.45°, C = 50.45°, c = 0.78045 19. no solution 20. A = 1.75°, B = 143.25°, b = 526.21
21. 7.83 ft, 10.6 ft 22. BC = 1258, AC = 2436.5, AD = 1822.5, CD = 1742 23. 884 N 24. 231.6mi
25. 25,200 ft 26. v = 85.03 lb, u = 116.40 lb 26. 23.2mi 28. 309.39 km / h, θ = 38.12 29. 27,300km 30. wrong

تمرین در جهت تطبیق قانون کوساین :ــ ---------- صفحهٔ ------- (٨٠)

1. A = 50.3°, B = 75.7°, c = 6.31 2. a = 112.22, C = 13.42°, B = 36.58 3. A = 70.9°, B = 11.1°, c = 4750
4. b = 0.1374, C = 57°, A = 37.35° 5. A = 34.72°, B = 40.67°, C = 139.51° 6. A = 48.62°, B = 61.55°, C = 69.83°
7. A = 18.21°, B = 22.28°, C = 139.51° 8. A = 65.28°, C = 35.05°, B = 80° 9. A = 6°, B = 16°, c = 1180
10. a = 23.34, C = 80.20°, B = 41.73° 11. A = 82.3°, b = 21.6, C = 11.4 12. c = 11.36, A = 76.29°, B = 26.11°
13. A = 39.09°, B = 61.82°, C = 71.24° 14. A = 60.64°, C = 5°, c = 4.93 15. A = 46.99°, B = 61.82°, C = 71.24°
16. A = 82.36°, B = 44.50°, C = 53.15° 17. A = 137.9°, B = 33.7°, C = 8.4° 18. A = 13.6°, B = 52°, C = 113.9°
19. b = 29.5, C = 14.4°, c = 14.9 20. A = 26°, B = 37.6° C = 180° − (A + B) 21. 1140 ft 22. 2100 km 23. 0.039 km

24. 74.21, C = 105.79, A = B , C = D 25. 96.93 26. not 27. 8.88 km /hr, θ =13.9 with the Bank

28. R = 502.92 mi/ hr 30 W --N 29. 42.53 30. 40.75

سوالات عبارتی وعملی :— ------ صفحۂ (۸۲)

1. Ax = 57.4, Ay = 30.5 2. Ax = -- 6.9, Ay = 4.15 3. Ax = --0.7485, Ay = --0.5357

4. Ax = 630, Ay = --183.98 5. R = 602, θ = 57.1 R = 744.90, θ = 23.33 7. R = 5960, θ = 33.60

8. R = 93.69, θ = 73.56 9. R = 965. θ = 8.6 10. R = 93.69, θ = 73.56 11. R = 26.12, θ = 146.03

12. R = 4799.50, θ = 350.91 13. R = 71.93, θ = 336.50 14. R = 54.70, θ = 278.39

15. R = 99.42, θ = 359.57 16. R = 6736.9, θ = 340.28 17. b = 18.1, C = 64, c = 17.5

18 B = 16, c = 14.420, a = 20.22 19. A = 21.2, b = 34.8, c = 51.5 20. C = 45.16, a = 10486, b = 3427

21. a = 17340, b = 24600, C = 7.99 22. A = 28.29, C = 60.69, B = 91 23. A = 39.88, a = 51.44, C = 30.03

24. C = 24.34 , B = 78.6, b = 12.14 25. A1 = 54.8, a1 = 12.7, B1 = 68.6, A2 = 12, a2 = 3.24, B2 = 111.4

26. no solution, 27. A = 32.3, b = 267, C = 17.7 28. a = 921.7, B = 42.42, c = 81.58

29. A = 148.7, B = 9.3 , c = 5.66 30. b = 0.721, C = 68.75, A = 5.85 31. a = 1782, b = 1920, C = 16

32. B = 20.87, C = 116, c = 10.38 33. A = 33.95, B = 24.48 C = 121.57 34. A = 51.96, C = 5.48, B = 123

35. A = 20.6, B = 35.6, C = 123.8 36. A = 66.98, B = 50.96, C = 62 37. -- 155.7, 81.14 38. 88.15, -- 115

39. 0.0291 h 40. 845.24 mi / hr 41. 27 ft / sec θ = 33.7 42. 8.54 km / hr θ = 20. 56 43. 269 mi / h, 468 mi / h

44. 8665.7 m, 45. 1067 ft 46. a = 22.32 47. 174.9 mi 48 19.85 m 49. 57 7 50. a = 30.22, B = 56 y= 124

51. 186 mi , 52. 62.18 53. 109.6 lb 54. 569.43 km from A and 89.45 from other city 55. 310 lb, 329.75

56. V = 1776.54 ft / sec , θ = 47.51

تمرین صفحۂ (۸۹) : ——— ------- قانون تنجنت --- (Law of Tangent)

1. a = 26, B = 41, C = 79
2. b = 177, A = 25 10, C = 4 50
3. c = 2.75, A = 21 10, B = 43, 40
4. a = 40.8, B = 26.9, C = 104.8

جواب صفحه (۹۸)

پریودها:

1. $\pi/3$ 3. $\pi/4$ 5. $\pi/6$

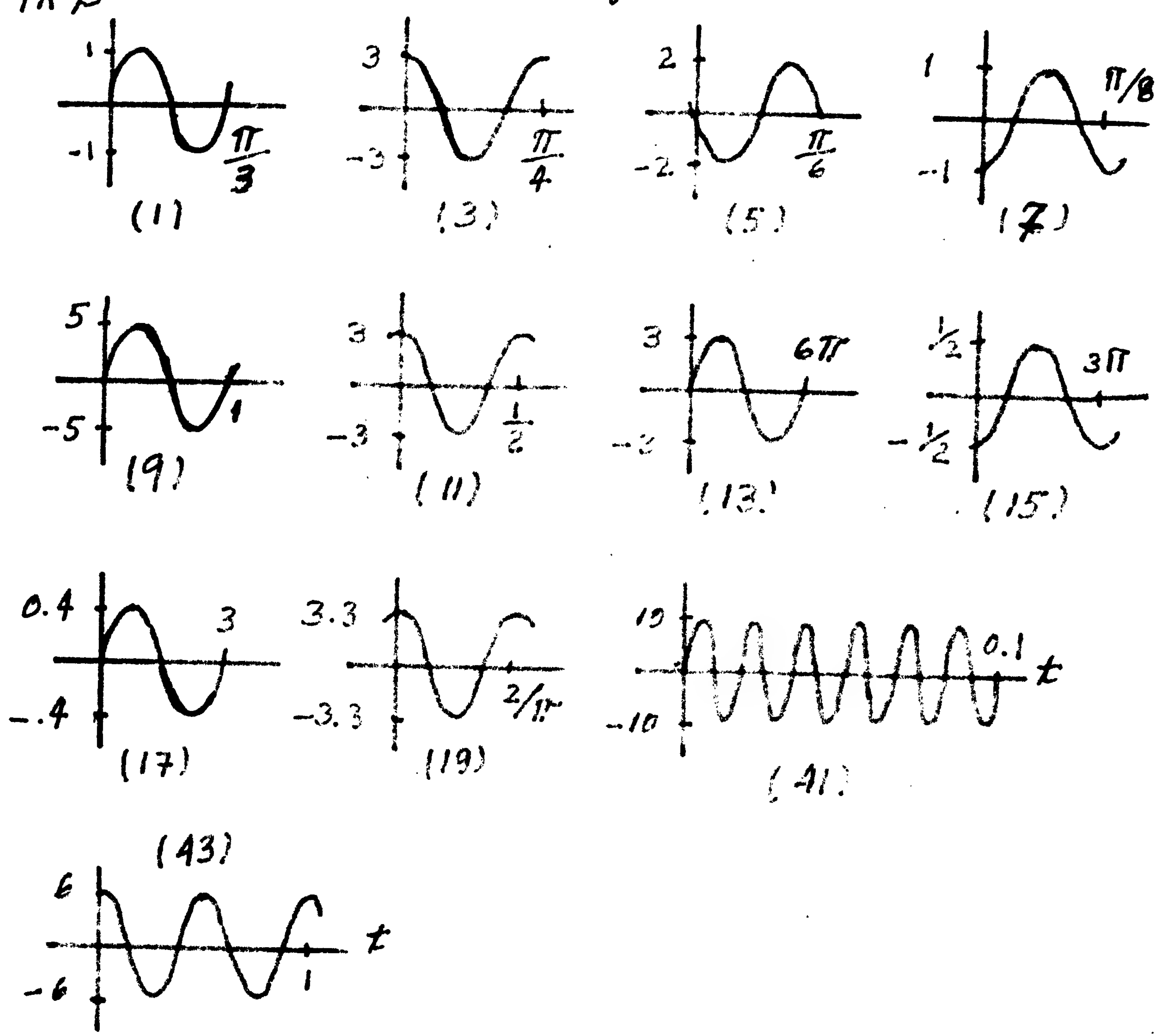
7. $\pi/8$ 9. 1 11. $1/2$

13. 6π 15. 3π 17. 3

19. $2/\pi$

گرافهای توابع مثلثاتی (تمرین فصل چهارم)

صفحه ۹۸



عملیهٔ انتر پولیشن خطی (Linear interpolation)

جداول مثلثات ، بطور عموم قیمت های توابع زاویه های بسیار دقیق را درج کرده نمیتواند زیرا حجم آن امکان دارد بسیار ضخیم گردد. لهذأ ، در اکثرأ عملیه های ریاضی مانند : لوگارتم و توابع مثلثاتی از عملیه انتشرپولیشن استفاده میشود. در اکثر یه جداول مثلثاتی و یا لوگاریتم قیمت های توابع بسیار دقیق زاویه ها را نمیتوان گنجانید ، زیرا از یك طرف حجم جداول بسیار کلان میشود و از طرف دیگر مشکلات زیاد دارد..

برای بدست آوردن قیمت بین در بین یك زاویه ، به نزدیکترین قیمت که در دقیق بودن محاسبه الجبری ما صد ق بکند ، از عملیهٔ انترپولیشن خطی استفا ده میکنیم . زریعه عملیهٔ انتر پولیشن ما میتوانیم قیمت توابع که در جدول نباشد بین دو قیمت بالا وپائین دریافت کرده آنرا در محاسبات خویش به کار ببریم .

عملیهٔ انتر پولیشن خطی :

انتر پولیشن عبارت از آن عملیهٔ خطی است که قیمت یك تا بع را بین دو قیمت متواتر که در جدول موجود بوده، دریافت نمائیم . درین عملیه فرض میشود که دو قیمت مسلسل در جداول مثلثاتی و لوگا رتم به اساس گراف های خط واقع اند. در حالیکه در حقیقت این تنا سب خطی نیست . اما اگر نقاط گرافیك با هم دیگر بسیار نزدیك واقع باشد در آنصورت گراف خطی بودن آن تا اندازهٔ صدق میکند. خلا صه انکه ، ذریعهٔ عملیهٔ انتر پولیشن خطی ، صرف قیمت بین در بین آن قیمت ها ی با لا و پا ئین به دست می آید که در جدول موصوف داده شده باشد. مثال های ذیل را در نظر بگیرید :

مثال اول : ($\tan 24^\circ 16'$) را از جدول مثلثات دریافت کنید ؟

حل : ما میدانیم که در جداول مثلثاتی صرف ($\tan 24^\circ 10'$) و ($\tan 24^\circ 20'$) داده شده است و قیمت ($\tan 24^\circ 16'$) مستقیماً از جدول پیدا شده نمیتواند . سپس از طریق عملیهٔ انتر پولیشن قیمت تابع مطلوب را دریافت مینمائیم :

$$10\left[\begin{array}{l} 6\left[\begin{array}{l}\tan 24^\circ 10' = 0.4487 \\ \tan 24^\circ 16' = ?\end{array}\right]d \\ \quad\ \tan 24^\circ 20' = 0.4522\end{array}\right]0.0035$$

$d / 0.0035 = 6 / 10 \qquad d = 6 / 10\,(0.0035) = 0.0021$

$\therefore \quad \tan 24^\circ 16' = 0.4487 + 0.0021 = \underline{0.4508}$ جواب ----

مثال دوم : قیمت ($\cos(-117^\circ 47')$) را از جدول دریافت کنید ؟

حل : ما میدانیم که زاویهٔ ($-117^\circ 47'$) در ربع سوم واقع است . یا به عبارهٔ دیگر زاویهٔ مأخذ (reference Angle) آن ($62^\circ 13'$) است . یا به عبارهٔ دیگر ، ($\cos -117^\circ 47' = -\cos 62^\circ 13'$) است .

از جدول مثلثات داده شده عملیهٔ ذیل را ا جرا میکنیم :

$$10\left[\begin{array}{l} 3\left[\begin{array}{l}\cos 62^\circ 10' = 0.4669 \\ \cos 62^\circ 13' = ?\end{array}\right]d \\ \quad\ \cos 62^\circ 20' = 0.4643\end{array}\right]0.0026$$

$d / 0.0026 = 3 / 10 , \qquad d = 0.0008$

$\therefore \quad \cos 62^\circ 13' = 0.4669 - 0.0008 = 0.4661$

$\cos(-117^\circ 47') = -0.4661$ جواب ..

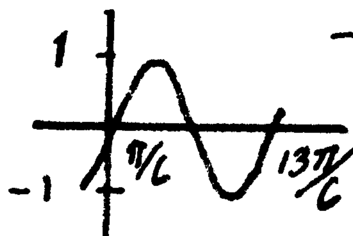
جوابات صفحه ۱۰۴ (تمرین عمومی فصل چهارم)

1. $T = 2\pi/b$

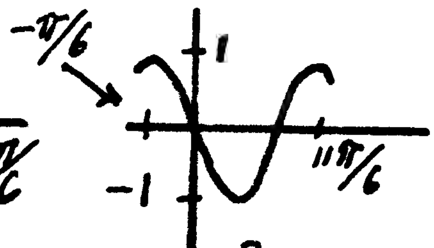
2. $A =$ دامنه اعظمی

3. displacement, $d = -c/b$

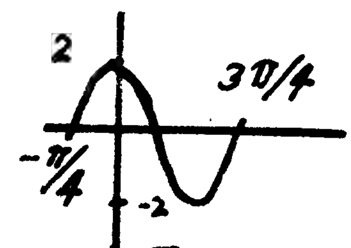
1. $1,\ 2\pi,\ \pi/6$ $\quad 1,\ 2\pi,\ -\pi/6$ $\quad 2,\ \pi,\ -\pi/4$ $\quad 1.\ \pi,\ \pi/2$



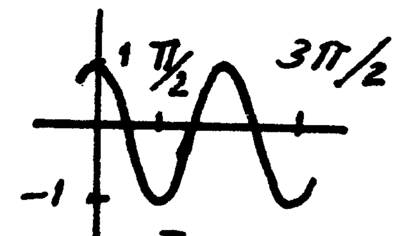
1.



3.

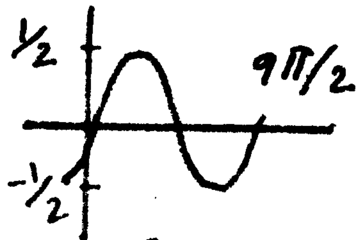


5.

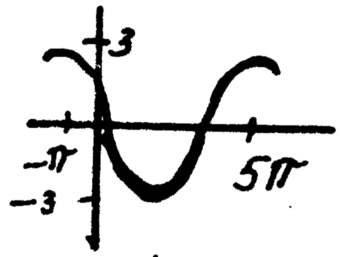


7.

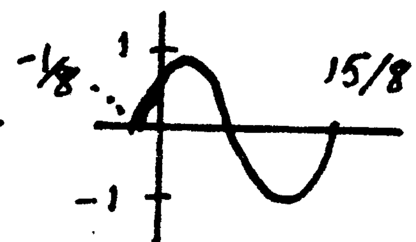
$1/2,\ 4\pi,\ \pi/2$ $\quad 3,\ 6\pi,\ -\pi$ $\quad 1,\ 2,\ -1/8$ $\quad 3/4,\ 1/2,\ 1/20$



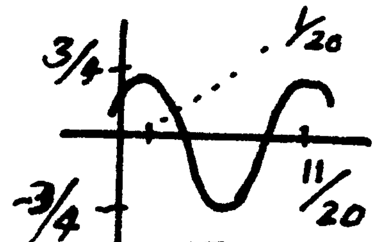
9.



11.

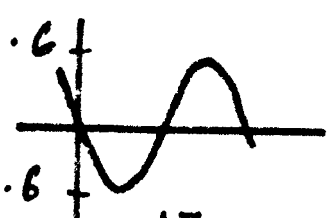


13.

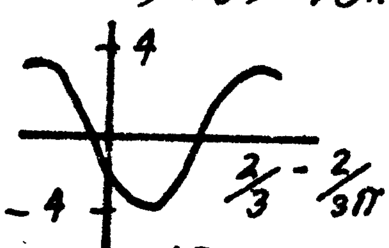


15.

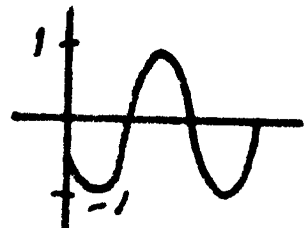
$0.6,\ 1,\ 1/2\pi$ $\quad 4,\ 2/3,\ -2/3\pi$ $\quad 1,\ 2/\pi,\ 1/\pi$ $\quad 3/2,\ 2,\ -\pi/6$



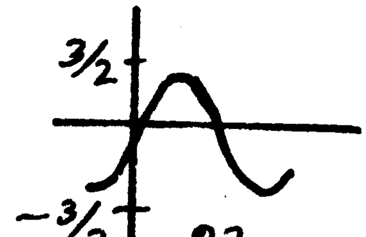
17.



19.

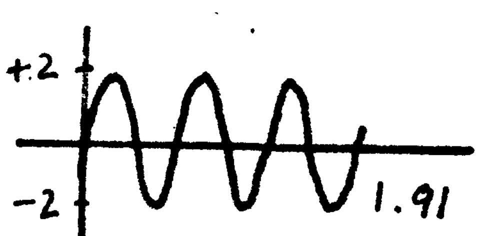


21.

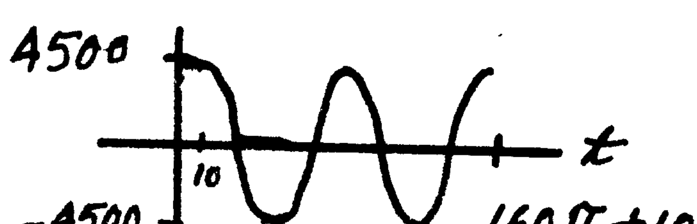


23.

23.



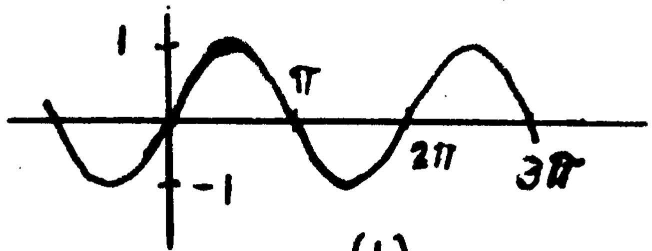
25.



27.

جوابات صفحهٔ ۱۰۷

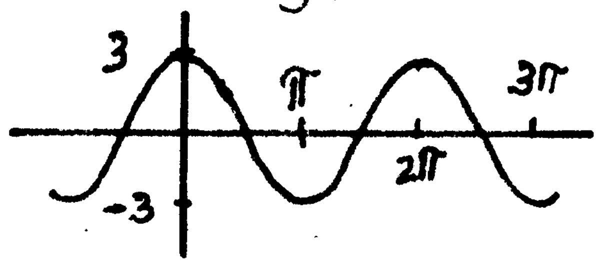
1.



(1)

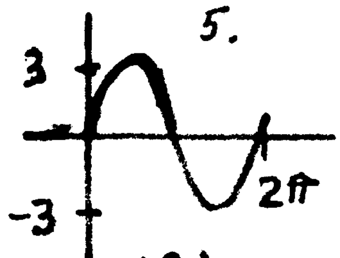
$y = \sin x$

3.



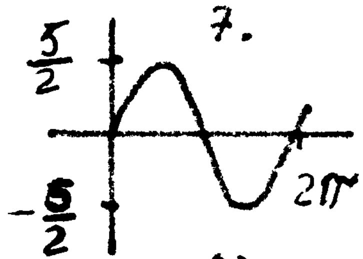
$y = 3\cos x$

5.



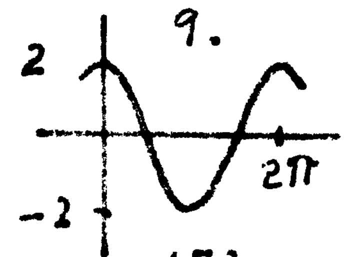
(3)

7.



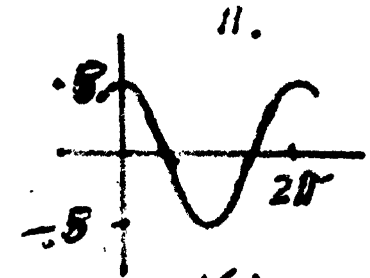
(4)

9.



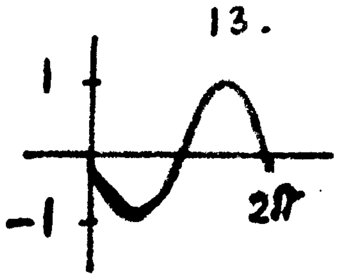
(5)

11.



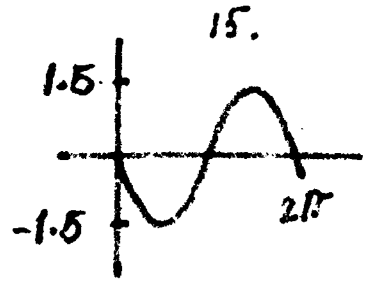
(6)

13.



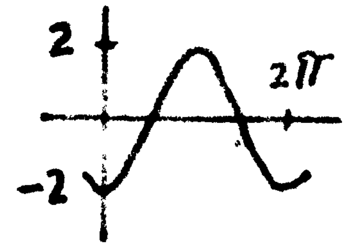
(7)

15.



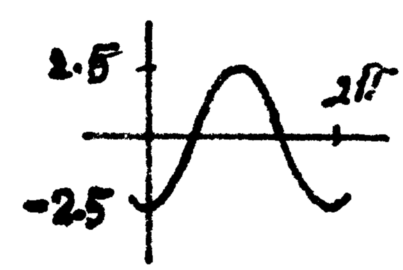
(8)

17.



(9)

19.



(10)

3. $y = 3\sin x$

4. $y = \frac{5}{2}\sin x$

5. $y = 2\cos x$

6. $y = .8\cos x$

7. $y = -\sin x$

8. $y = -1.5\sin x$

9. $y = -2\cos x$

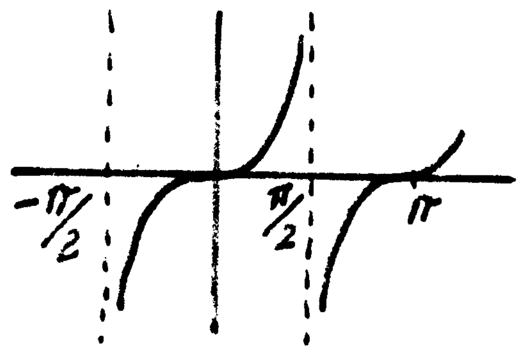
10. $y = -2.5\cos x$

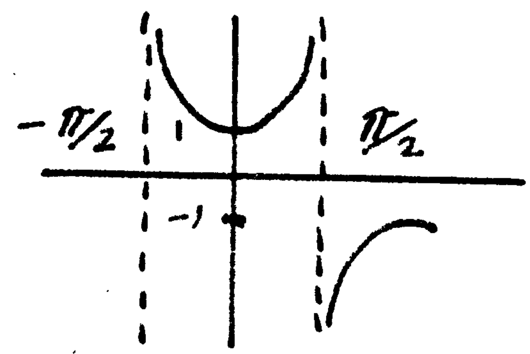
جواب صفحه (۱۰۷) ...... تمرین ها . . .

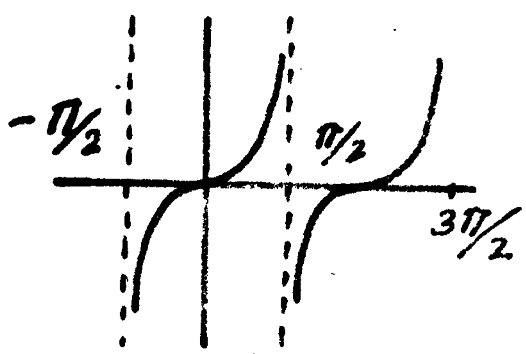
1. ∞, -1.7, -1, -0.58, 0, 0.58, 1, 1.7 ∞, -1.7, -1, -0.58, 0

3. ∞, 2, 1.4, 1.2, 1, 1.2, 1.4, 2, ∞, -2, -1.4, -1.2, -1

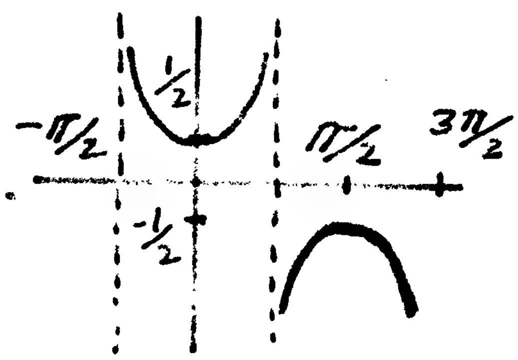
جواب صفحه (107)

1. 

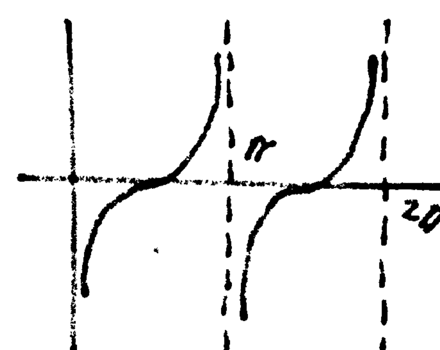
3. 



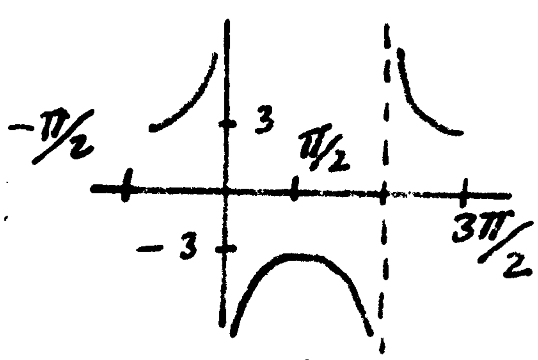
(5)



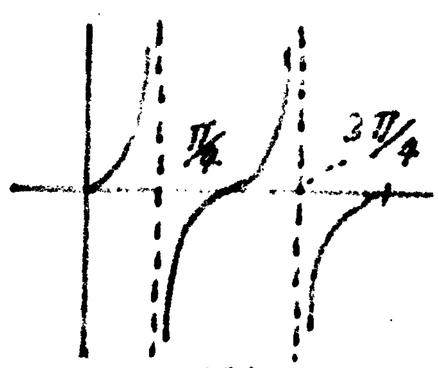
(7)



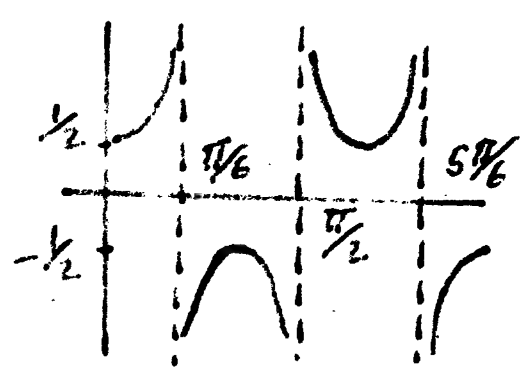
(9)



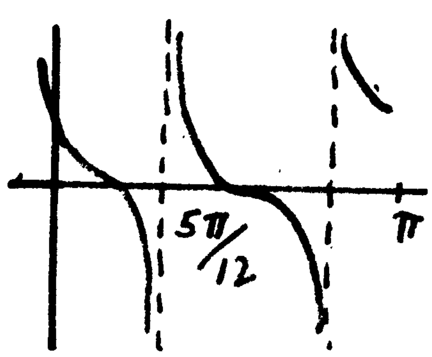
(11)



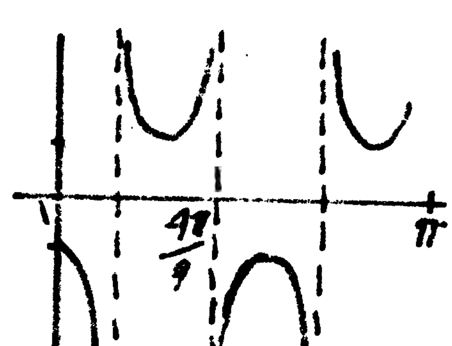
(13)



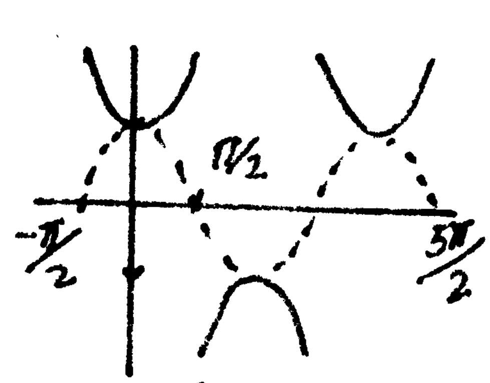
(15)



(17)

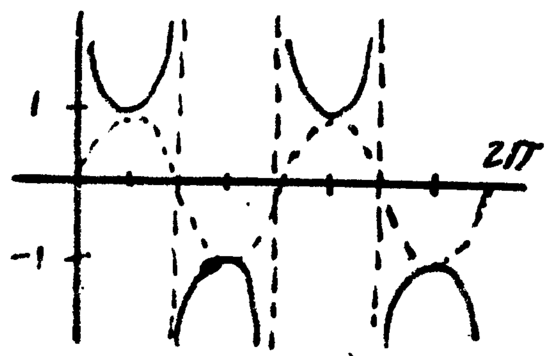


(19)

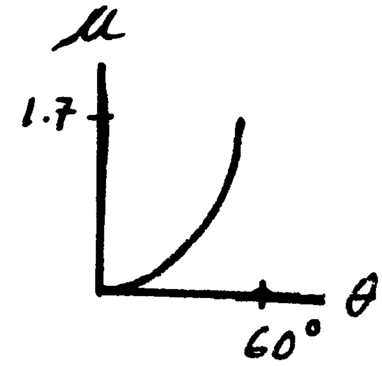


(21)

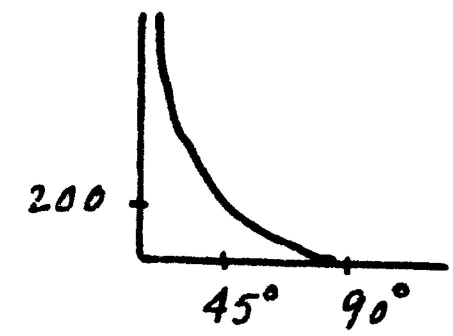
جوابات صفحه (۱۰۸)



(23)

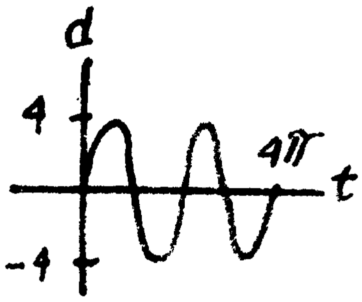


(25)

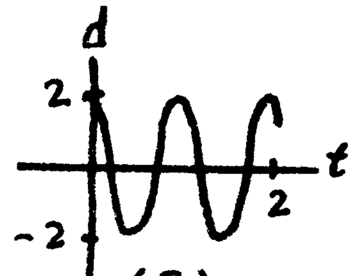


(27)

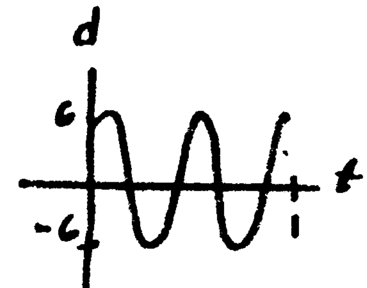
جوابات صفحه ۱۱۳—۱۱۴



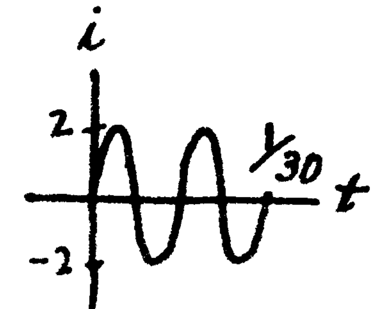
(1)



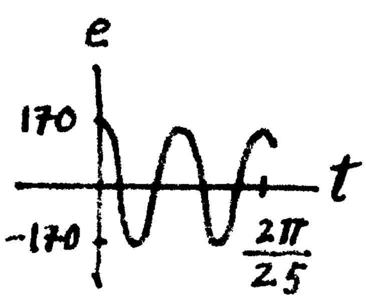
(3)



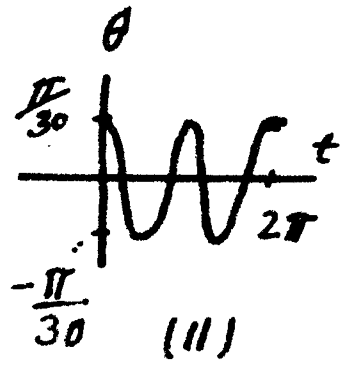
(5)



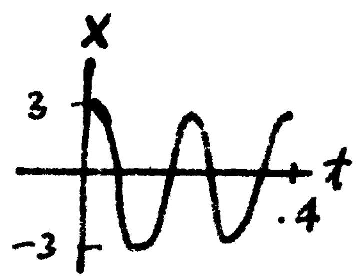
(7)



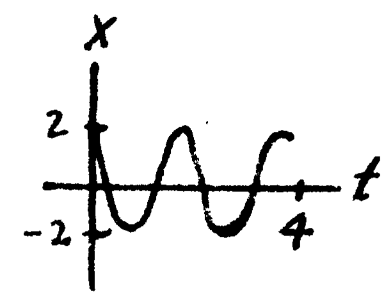
(9)



(11)

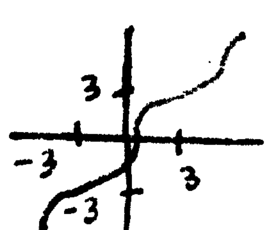


(13)

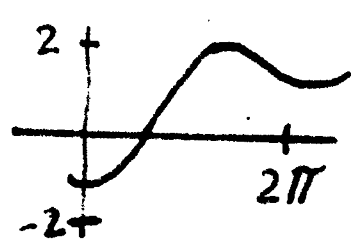


(15)

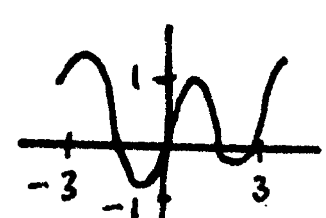
جوابات (۱۱۷-۱۱۸) صفحه (117-118)



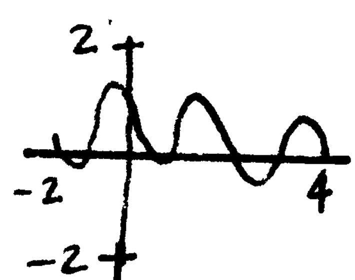
(1)



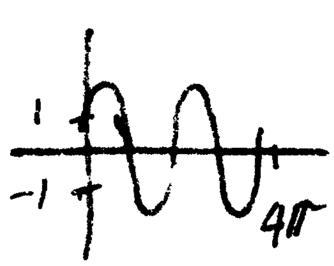
(3)



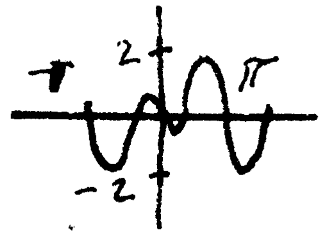
(5)



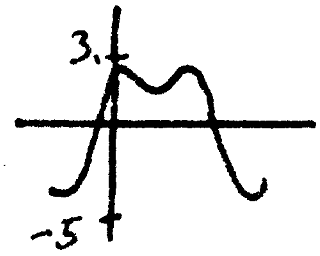
(7)



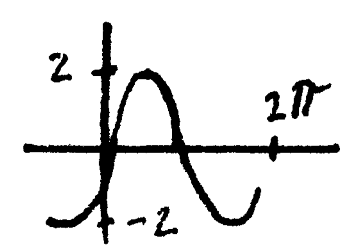
(9)



(11)



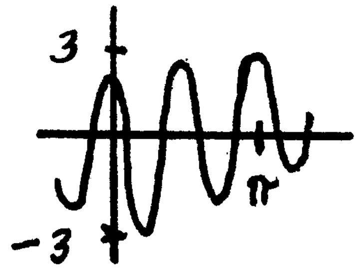
(13)



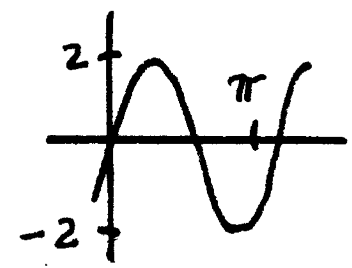
(15)

جوابات صفحه (118) --- ۱۱۸

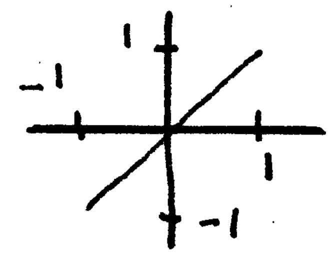
(17)



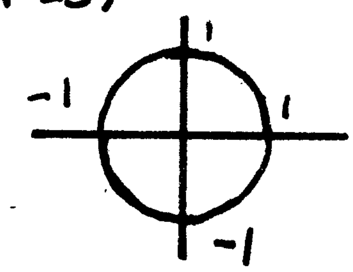
(19)



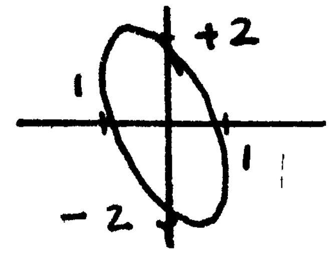
(21)



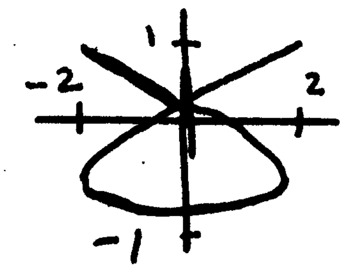
(23)



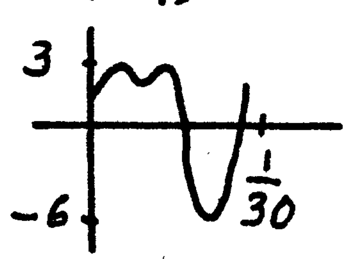
(25)



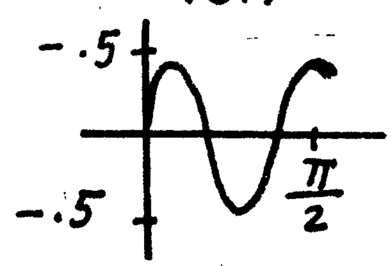
(27)



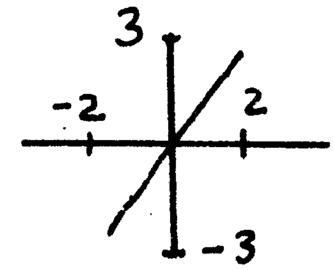
(29)



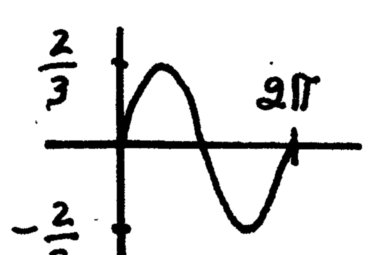
(31)



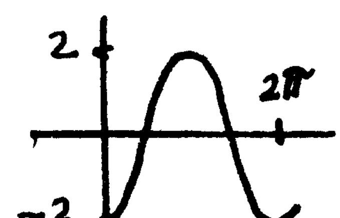
(33)



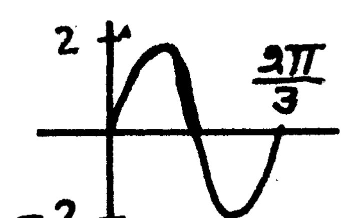
جوابات صفحه (118) - (تمرین عمومی فصل چهارم)



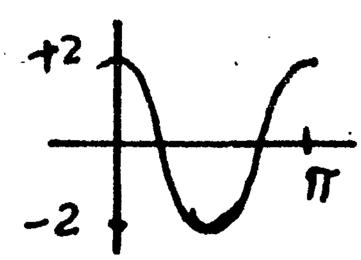
(1)



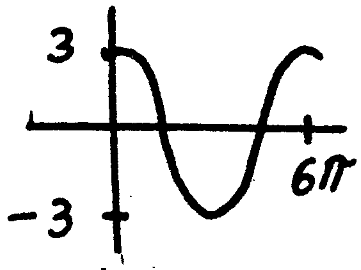
(3)



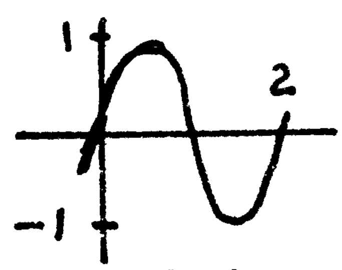
(5)



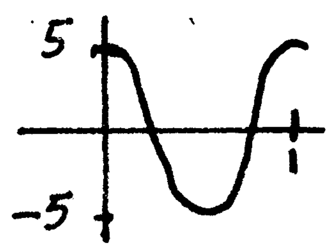
(7)



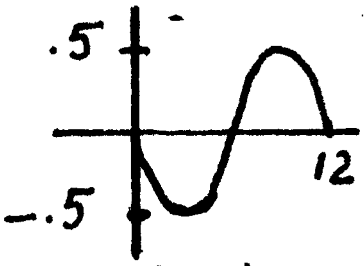
(9)



(11)

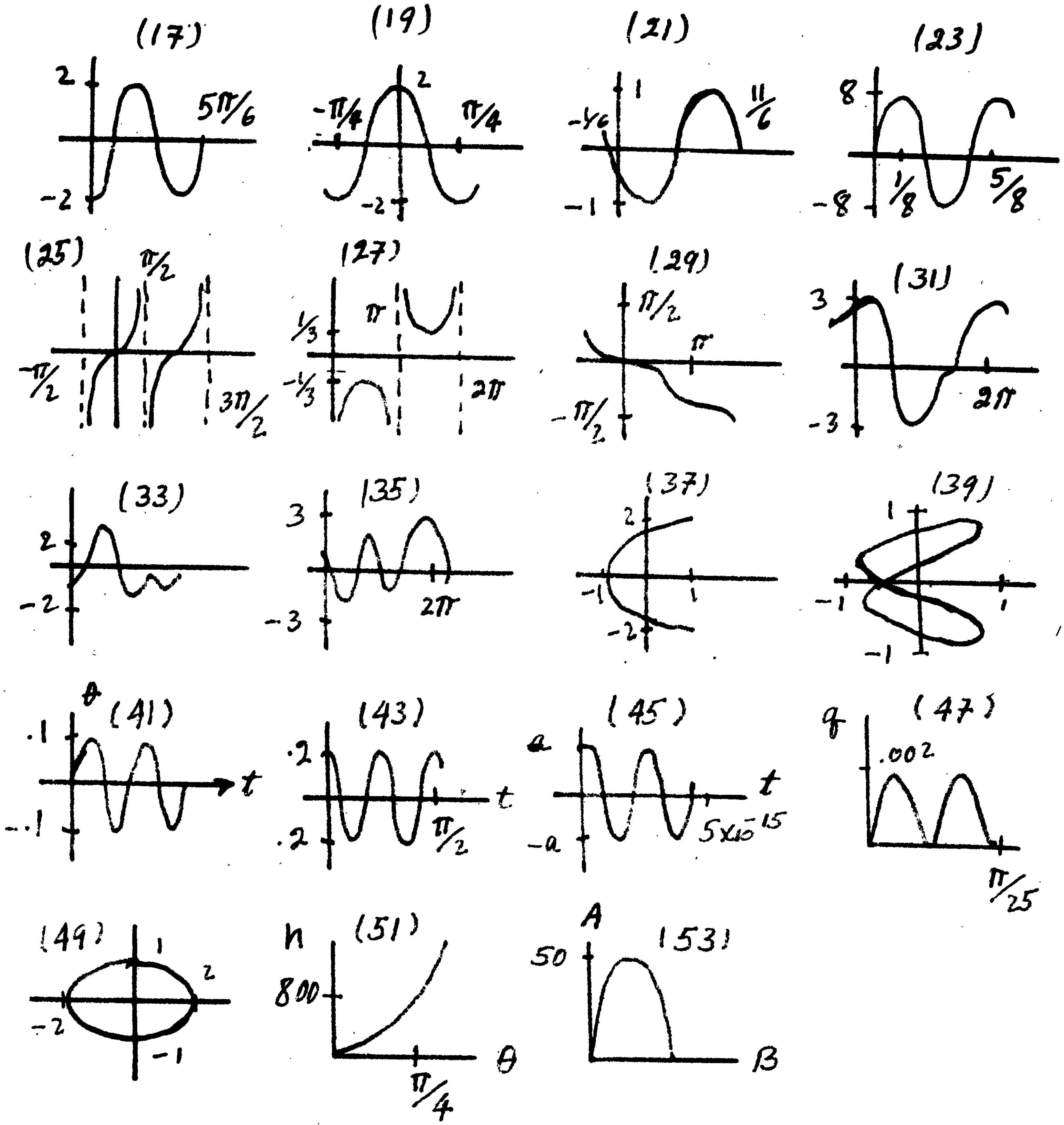


(13)
(۱۴)



(15)

جوابات صفحه (۱۱۸-۱۲۹) ... تمرین عمومی فصل چهارم)



جوابات تمرين (1-5) ------ صفحة (125)

(مسائل بتة ها)

1. $\cos\theta \sec\theta = 1$

$\frac{\cos\theta}{\cos\theta} = 1$

2. $\cot\theta / \cos\theta = \csc\theta$

$\frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{\frac{\cos\theta}{1}} = \frac{1}{\sin\theta} = \csc\theta$

3. $\sin\theta \sec\theta = \tan\theta$

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$

4. $\sin\theta / \tan\theta = \cos\theta$

$\frac{\sin\theta}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \cos\theta$

5. $\frac{\csc\theta}{\sec\theta} = \cot\theta$

$\frac{\frac{1}{\sin\theta}}{\frac{1}{\cos\theta}} = \cot\theta$

6. $\sin\theta \cot\theta = \cos\theta$

$\sin\theta\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) = \cos\theta$

7. $(1+\cos t)(1-\cos t) = \sin^2 t$

$1 - \cos^2 t = \sin^2 t$

8. $\sin x \sec x = \tan x$

$\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$

9. $\cos^2 t - \sin^2 t = 2\cos^2 t - 1$

$\cos^2 t - (1 - \cos^2 t) =$

$= \cos^2 t - 1 + \cos^2 t = 2\cos^2 t - 1$

10. $\csc^2 x(1 - \cos^2 x) = 1$

$\csc^2 x(\sin^2 x)$

$\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} = 1$

13. $(1+\sin t)(1-\sin t) = \frac{1}{\sec^2 t}$

$1 - \sin^2 t = \cos^2 t = \frac{1}{\sec^2 t}$

12. $\sin x(1 + \cot^2 x) = \csc x$

$\sin x(\csc^2 x)$

$\frac{\csc^2 x}{\csc x} = \csc x$

11 $\frac{\sin t}{\csc t} + \frac{\cos t}{\sec t} = 1$

$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$

14 $\sin x(\csc x - \sin x) = \cos^2 x$

$\sin x\left(\frac{1}{\sin x} - \sin x\right)$

$\sin x\left(\frac{1-\sin^2 x}{\sin x}\right) = \cos^2 x$

15. $\sec t - \cos t = \tan t \sin t$

$\frac{1}{\cos t} - \cos t = \frac{1-\cos^2 t}{\cos t}$

$= \frac{\sin^2 t}{\cos t} = \tan t \sin t$

16. $\tan\theta(\cot\theta + \tan\theta) = \sec^2\theta$

$\tan\theta\cot\theta + \tan^2\theta$

$\frac{\tan\theta}{\tan\theta} + \tan^2\theta$

$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

17. $\frac{\csc^2 t}{1+\tan^2 t} = \cot^2 t$

$\frac{\csc^2 t}{\sec^2 t} = \frac{\frac{1}{\sin^2 t}}{\frac{1}{\cos^2 t}}$

$= \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} = \cot^2 t$

18. $\sin x \tan x + \cos x = \sec x$

$\frac{\sin^2 x}{\cos x} + \cos x = \frac{\sin^2 + \cos^2}{\cos x} =$

$= \frac{1}{\cos x} = \sec x$

19. $\sin t(\csc t - \sin t) = \cos^2 t$

$= 1 - \sin^2 t = \cos^2 t$

21. $\csc t - \sin t = \cot t(\cos t)$

$\frac{1}{\sin t} - \sin t = \frac{1-\sin^2 t}{\sin t} = \frac{\cos^2 t}{\sin t}$

$= \cot t(\cos t)$

22. $\sec\theta \tan\theta \csc\theta = \tan^2\theta + 1$

$\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)\left(\frac{1}{\sin\theta}\right) = \frac{1}{\cos^2\theta}$

$= \sec^2\theta$

24. $\cot\theta(\sec^2\theta - \cot\theta) = \tan\theta$

$\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\left(\frac{1}{\cos^2\theta}\right) - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\,)$

$\frac{1}{\sin\theta\cos\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1-\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$= \frac{\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$

26. $\tan x + \cot x = \sec x \csc x$

$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \sin x}$

$= \frac{1}{\cos x \sin x} = \sec x \csc x$

28. $\sin^2 x \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$

$1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$

29. $\sec^2\theta \csc^2\theta = \sec^2\theta + \csc^2\theta$

$\frac{1}{\cos^2\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} = \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos^2\theta\sin^2\theta}$

$\frac{1}{\cos^2\theta\sin^2\theta} = \sec^2\theta\csc^2\theta$

20. $\cos\theta\cot\theta + \sin\theta = \csc\theta$

$\cos\theta\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \sin\theta = \csc\theta$

$\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} + \sin\theta =$

$\frac{\sin^2 + \cos^2\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\sin\theta}$

$= \csc\theta$

23. $\frac{(\sec^2 x - 1)}{\sec^2 x} = \sin^2 x$

$\frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 x}}$

$1 - \cos^2 x = \sin^2 x$

25. $(\cos^2\theta - 1)(\tan^2\theta + 1) = 1 - \sec^2\theta$

$(\cos^2\theta - 1)(\sec^2\theta) = \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} - \sec^2\theta$

$= 1 - \sec^2\theta$

27. $\sec x \csc x + \cot x = \tan x + 2\cos x \csc x$

$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{2\cos x}{\sin x}$

$= \frac{\sin^2 x + 2\cos^2 x}{\cos x \sin x} = \frac{\sin^2 x}{\cos x \sin x} +$

$\frac{2\cos^2 x}{\cos x \sin x} = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{2\cos x}{\sin x}$

$= \tan x + 2\cot x$

$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} + \cot x$

$= \frac{\sin^2 + \cos^2 x}{\sin x \cos x} + \cot x$

$= \frac{1}{\sin x \cos x} + \cot x$

$= \sec x \csc x + \cot x$

30. $\frac{\sin x}{1-\cos x} = \csc x + \cot x$

$\frac{1}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x + \sin x \cos x}{\sin^2 x}$

$= \frac{\sin x(1+\cos x)}{\sin^2 x} = \frac{\sin x(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}$

$= \frac{\sin x}{1-\cos x}$

31. $\frac{1+\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1+\cos x} = 2\csc x$

$= \frac{(1+\cos x)^2 + \sin^2 x}{\sin x(1+\cos x)}$

$= \frac{1+2\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin x(1+\cos x)}$

$= \frac{1+2\cos x+1}{\sin x(1+\cos x)}$

$= \frac{2(1+\cos x)}{\sin x(1+\cos x)} = \frac{2}{\sin x}$

$= 2\csc x$

32. $\frac{\sec\theta+\csc\theta}{1+\tan\theta} = \csc\theta$

$\frac{\sec\theta+\csc\theta}{1+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{\frac{1}{\cos\theta}+\frac{1}{\sin\theta}}{\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta}}$

$= \frac{\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}}{\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta}} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$= \frac{1}{\sin\theta} = \csc\theta$

33. $\frac{1+\tan^2\theta}{\tan^2\theta} = \csc^2\theta$

$\frac{\sec^2\theta}{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}} = \frac{1}{\cos^2\theta} \times \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$

$= \frac{1}{\sin^2\theta} = \csc^2\theta$

34. $\tan^2 t\cos^2 t + \cot^2 t\sin^2 t = 1$

$\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\cos^2 t + \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}\sin^2 t$

$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$

35. $\frac{1+\sin x}{1-\sin x} - \frac{1-\sin x}{1+\sin x} = 4\tan x\sec x$

$= \frac{(1+\sin x)^2-(1-\sin x)^2}{(1-\sin^2 x)}$

$= \frac{1+2\sin x+\sin^2 x-1+2\sin x-\sin^2 x}{\cos^2 x}$

$= \frac{4\sin x}{\cos^2 x} = 4\tan x\sec x$

36. $\frac{\sec x}{\cos x} - \frac{\tan x}{\cot x} = 1$

$\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\tan x}{\frac{1}{\tan x}} = \frac{1}{\cos^2 x} - \tan^2 x$

$= \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1-\sin^2 x}{\cos^2 x}$

$= \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 1$

37. $\frac{1+\csc t}{\sec t} - \cot t = \cos t$

$\frac{1+\frac{1}{\sin t}}{\frac{1}{\cos t}} - \frac{\cos t}{\sin t}$

$\left(\frac{\sin t+1}{\sin t}\right)\cos t - \frac{\cos t}{\sin t}$

$= \frac{\sin t\cos t+\cos t-\cos t}{\sin t} = \cos t$

38. $\frac{1-2\cos^2 x}{\sin x\cos x} = \tan x - \cot x$

$\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x}$

$= \frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin x\cos x} = \frac{1-\cos^2 x-\cos^2 x}{\sin x\cos x} = \frac{1-2\cos^2 x}{\sin x\cos x}$

39. $(\sec x - \tan x)(\csc x + 1) = \cot x$

$\left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x}\right)\left(\frac{1}{\sin x} + 1\right)$

$\left(\frac{1-\sin x}{\cos x}\right)\left(\frac{1+\sin x}{\sin x}\right)$

$= \frac{1-\sin^2 x}{\sin x\cos x} = \frac{\cos^2 x}{\sin x\cos x} = \underline{\cot x}$

40. $4\sin t + \tan t = \frac{4+\sec t}{\csc t}$

$4\sin t + \frac{\sin t}{\cos t}$

$\frac{4\sin t\cos t + \sin t}{\cos t} =$

$= \frac{\sin t(4\cos t + 1)}{\cos t}$

$= \tan t(4\cos t + 1)$

$= 4\sin t + \tan t$

41. $\frac{(\cot x - 1)}{1 \mp \tan x} = \cot x$

$\frac{\frac{\cos x}{\sin x} - 1}{1 \mp \frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{\frac{\cos x - \sin x}{\sin x}}{\frac{\cos x \mp \sin x}{\cos x}}$

$= \frac{\cos x}{\sin x} = \underline{\cot x}$

42. $\sec x + \tan x + \cot x = \frac{1+\sin x}{\cos x\sin x}$

$\frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}$

$= \frac{\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x\cos x}$

$= \frac{\sin x + 1}{\sin x\cos x}$

43. $\csc^4 t \mp \cot^4 t = \cot^2 t + \csc^2 t$

$(\csc^2 t + \cot^2 t)(\csc^2 t - \cot^2 t)$

$= \csc^2 t + \cot^2 t$

44. $\frac{\cos\theta + \sin\theta}{1 + \tan\theta} = \cos\theta$

$= \frac{\cos\theta + \sin\theta}{1 + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{\cos\theta + \sin\theta}{\frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta}}$

$= \cos\theta$

45. $\frac{\cos x}{1-\sin x} = \sec x + \tan x$

$\frac{\cos x(1+\sin x)}{1-\sin x(1+\sin x)} = \frac{\cos x(1+\sin x)}{\cos^2 x}$

$= \frac{\cos x + \cos x\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x}{\cos^2 x} + \frac{\cos x\sin x}{\cos^2 x}$

$= \sec x + \tan x$

46. $(\tan x + \cot x)\sin x\cos x = 1$

$= \frac{\cos x\sin^2 x}{\cos x} + \frac{\cos^2 x\sin x}{\sin x}$

$= \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

47. $\frac{\tan^2\theta}{\sec\theta + 1} = \frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}$

$= \frac{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{\frac{1}{\cos\theta} + 1} = \frac{\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}}{\frac{1+\cos\theta}{\cos\theta}}$

$\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} \times \frac{1}{1+\cos\theta} = \frac{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}{\cos\theta(1+\cos\theta)}$

$= \frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}$

48. $2\sin^4 x - 3\sin^2 x + 1 = \cos^2 x(1 - 2\sin^2 x)$

$2\sin^4 x - 3\sin^2 x + \sin^2 x + \cos^2 x$

$2\sin^4 x - 2\sin^2 x + \cos^2 x$

$2\sin^2 x(\sin^2 x - 1) + \cos^2 x$

$2\sin^2 x(\sin^2 x - 1) - (\sin^2 x - 1)$

$(\sin^2 x - 1)(2\sin^2 x - 1)$

$\cos^2 x(2\sin^2 x - 1)$

مثال سوم : کوچکترین قیمت (t) را برای توابع ذیل دریافت کنید؟ (sin t = 0.6635) به خاطر داشته باشید که (t) به ریدین داده شده است ۰

حل : ما نخست۔ عدد (0.6635) را در متن جدول جستجو مینمائیم ، تا عدد نزدیکترین به آنرا دریافت کنیم ۰ و بعداً عملیهٔ ذیل را اجرا می نمائیم

0.0029 [d [sin (0.7243) = 0.6626 ; sin (t) = 0.6635] 0.0009 ; sin (0.7272) = 0.6648] 0.0022

$d / 0.0029 = 0.0009 / 0.0022 \quad , \quad d = 9 / 22 \; (0.0029) = 0.0012$

$t = 0.7243 + 0.0012 = 0.7255$ rad. جواب۰۰۰۰

مثال چهارم : تابع ذیل داده شده است ، تمام قیمت های زاویهٔ ($\acute{\theta}$) را بین (0° --- 360°) از جدول پیدا کنید۰

$(\sin \acute{\theta} = -0.7963)$

حل : فرض کنید که (θ) زاویهٔ مأخذ است که : ---------- $(\sin \theta = 0.7963)$

10 [d [$\sin 52^\circ 40' = 0.7951$; $\sin (\theta) = 0.7963$] 0.0012 ; $\sin 52^\circ 50' = 0.7969$] 0.0018

$d / 10 = 0.0012 / 0.0018 \quad , \quad d = 7$

جواب $\theta = 52^\circ 47'$ (این زاویه مأخذ است)

طوریکه ملا حظه میشود قیمت ($\acute{\theta}$) منفی بوده ، لهذا زاویهٔ (θ) در ربع سوم و ربع چارم موقیعت گرفته میتواند ۰ لذا به اساس زاویه مأخذ ($\theta = 52^\circ 47'$) چنین نوشته کرده میتوانیم :

$\acute{\theta} = 180^\circ + 52^\circ 47' = 232^\circ 47'$ ---- در ربع سوم

جواب $\acute{\theta} = 360^\circ - 52^\circ 47' = 307^\circ 13'$ ---- در ربع چارم

تمرین های (۳ ـــ ۱)

۱ـــ با استفاده از نقاله ، زاویهٔ های ذیل را رسم کنید و بعداً از ضلع دوم زاویه یا وتر مثلث ، ده واحد (10 cm) جدا کنید ۰ بعدا از نقطهٔ جدا شده، عمودی را بالای محور (X) رسم کنید ۰ سپس قیمت های (X) و (Y) را ذریعهٔ خطکش اندازه کرده تمام توابع زاویه ها را دریافت کنید؟

1. 40° 2. 75° 3. 15° 4. 53°

۲ـــ از تمرین (۵ الی ۱٦)۔ توابع مثلثاتی زاویه های ارائه شده توسط کلکولیتر دریافت کنید؟

5.	$\sin 22.4^\circ$	6.	$\cos 72.5^\circ$	7,	$\sin 57.6^\circ$	8.	$\sin 36.0^\circ$
9.	$\cos 15.71'$	10.	$\tan 8.653^\circ$	11.	$\sin 83.792'$	12.	$\cos 46.725'$
13.	$\cot 67.78'$	14.	$\csc 22.81'$	15.	$\sec 50.4'$	16.	$\cot 41.8'$

49. $\frac{(\cot x - 1)}{(\cot x + 1)} = \frac{1+\tan x}{1-\tan x}$

$= \frac{(\cot x - 1)/\cot x}{(\cot x + 1)/\cot x} = \frac{1-\tan x}{1+\tan x}$

50. $\frac{\sin^4\theta - \cos^4\theta}{1-\cot^4\theta} = \sin^4\theta$

$\frac{(\sin^2\theta+\cos^2\theta)(\sin^2-\cos^2\theta)}{1-\frac{\cos^4\theta}{\sin^4\theta}}$

$= \frac{\sin^4\theta-\cos^4\theta}{\frac{\sin^4\theta-\cos^4\theta}{\sin^4\theta}} = \sin^4\theta$

51. $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 x - \cos^2 x$

$(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x)$

$\swarrow$ 1

52. $\frac{\cot x}{\sec x - \tan x} - \frac{\cos x}{\sec x + \tan x} = \sin x \csc x$

$= \frac{\cot x(\sec x + \tan x) - \cos x(\sec x - \tan x)}{\sec^2 x - \tan^2 x}$

$\cot x \sec x + 1 - 1 + \cos \tan x$

$\frac{1}{\sin x} + \sin x = \csc x \sin x$

$(\sin^2 x + \cos^2 x)^3 = 1$

$(1)^3 = 1$

53. $\tan^4 x - \sec^4 x = 1 - 2\sec^2 x$

$(\tan^2 + \sec^2)(\tan^2 - \sec^2)$

$(1+2\tan^2 x)(\tan^2 - (1+\tan^2))$

$(2\sec^2 - 1)(-1)$

$= (1 - 2\sec^2 x)$

56. $\frac{1+\csc x}{\cot x + \cos x} = \sec x$

$= \frac{\frac{\sin x + 1}{\sin x}}{\frac{\cos x}{\sin x} + \cos x} = \frac{\sin x + 1}{\cos x + \sin x \cos x} = \frac{1}{\cos x} = \sec x$

57. $\left(\frac{\sin^2 x}{\tan^4}\right)^3 \left[\frac{\csc^3 x}{\cot^6 x}\right]^2 = 1$

$\left(\frac{\sin^6 x}{\tan^{12} x}\right)\left(\frac{\csc^6 x}{\cot^{12} x}\right)$

$\left(\sin^6 x \times \frac{\cos^{12} x}{\sin^{12} x}\right)\left(\frac{1}{\sin^6 x} \times \frac{\sin^{12} x}{\cos^{12} x}\right)$

$= 1$

58. $\frac{\sin x + \cos x}{\tan^2 x - 1} = \frac{\cos^2 x}{\sin x - \cos x}$

$\frac{\sin x + \cos x}{\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\sin x + \cos x}{1} \times \frac{\cos^2 x}{\sin^2 - \cos^2 x}$

$= \frac{\cos^2 x}{\sin x - \cos x}$

59. $(a\cos x - b\sin x)^2 + (a\sin x + b\cos x)^2 = a^2 + b^2$

$(a^2\cos^2 x - 2ab\sin x\cos x + b^2\sin^2 x + a^2\sin^2 x + 2ab\sin x\cos x + b^2\cos^2 x)$

$a^2(\cos^2 x + \sin^2 x) + b^2(\sin^2 x + \cos^2 x) = a^2 + b^2$

$\swarrow$ 1 $\quad\quad \swarrow$ 1

60. $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 \cos^2 x$

$(\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 =$

$(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x)$

$= 1\ (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 - \sin^2 x\cos^2 x$

$= \sin^2 x(\sin^2 x - \cos^2 x) + \cos^4 x$

$(\sin^2 x - \cos^2 x)^2 + \sin^2 x\cos^2 x$

$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x - \sin^2 x\cos^2 x$

$1 - 3\sin^2 x\cos^2 x$

61. $\dfrac{\sin x}{1+\cos x} + \dfrac{1+\cos x}{\sin x} = 2\csc x$

$\dfrac{\sin^2 x + (1+\cos x)^2}{\sin x(1+\cos x)}$

$= \dfrac{\sin^2 x + 1 + 2\cos x + \cos^2 x}{\sin x(1+\cos x)} = \dfrac{2(1+\cos x)}{\sin x(1+\cos x)}$

$= \dfrac{2}{\sin x} = \underline{\underline{2\csc x}}$

جمع و تفریق کنیم ← $2\sin^2 x\cos^2 x$

62. $\dfrac{\csc x}{1+\csc x} - \dfrac{\csc x}{1-\csc x} = 2\sec^2 x$

$= \dfrac{\csc x(1-\csc x) - \csc x(1+\csc x)}{1-\csc^2 x}$

$= \dfrac{-2\csc^2 x}{1-\csc^2 x} = \dfrac{\frac{-2}{\sin^2 x}}{1-\frac{1}{\sin^2 x}}$

$= \dfrac{-2}{\sin^2 x - 1} = \dfrac{2}{1-\sin^2 x}$

$= \dfrac{2}{\cos^2 x} = \underline{\underline{2\sec^2 x}}$

63. $\dfrac{1}{\tan x + \cot x} = \sin x\cos x$

$\dfrac{1}{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}} = \dfrac{1}{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x\cos x}}$

$= \underline{\underline{\sin x\cos x}}$

64. $\dfrac{\cot x - \tan x}{\sin x\cos x} = \csc^2 x - \sec^2 x$

$\dfrac{\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x\cos x} = \dfrac{\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x\cos x}}{\sin x\cos x}$

$= \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x} = \dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$= \csc^2 x - \sec^2 x$

65. $\sec\theta + \csc\theta - \cos x - \sin x$

$= \sin x\tan x + \cos x\cot x$

$\dfrac{1}{\cos x} + \dfrac{1}{\sin x} - (\cos x + \sin x)$

$= \dfrac{\sin x + \cos x - \sin x\cos x(\cos x + \sin x)}{\cos x\sin x} =$

$= \dfrac{\sin x + \cos x(1 - \sin x\cos x)}{\cos x\sin x}$

$\dfrac{\sin^2 x}{\cos x} + \dfrac{\cos^2 x}{\sin x} = \dfrac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\cos x\sin x}$ طرف دیگر مسئله

66. $\sin^3 x + \cos^3 x = 1 - \sin x\cos x)(\sin x + \cos x) = \dfrac{(\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x\cos x)}{\cos x\sin x}$

$(\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x\cos x)$

$= \dfrac{\sin x + \cos x(1 - \sin x\cos x)}{\cos x\sin x}$

67 $(1 - \tan^2 x)^2 = \sec^4 x - 4\tan^2 x$

$1 - 2\tan^2 x + \tan^4 x$

$1 - \tan^2 x(2 + \tan^2 x)$

$\rightarrow (\sec^2 x)^2 - 4\tan^2 x$

$(1 + \tan^2 x)^2 - 4\tan^2 x$

$1 + 2\tan^2 x + \tan^4 x - 4\tan^2 x$

$\rightarrow 1 - 2\tan^2 x + \tan^4 x$

$1 - \tan^2 x(2 + \tan^2 x)$

چی شد اینا؟

68. $\cos^4 x + 1 - \sin^4 x = 2\cos^2 x$

$(\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) + 1$

$(\cos^2 x - \sin^2 x) + 1 = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) + 1$

$\rightarrow \cos^2 x - 1 + \cos^2 x + 1$

$= \underline{2\cos^2 x}$

69. $\frac{\tan x}{1-\cot x}+\frac{\cot x}{1-\tan x}=1+\sec x\csc x$

$\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{1-\frac{\cos x}{\sin x}}+\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{1-\frac{\sin x}{\cos x}}$

$\frac{\sin^2 x}{\cos x(\sin x-\cos x)}+\frac{\cos^2 x}{\sin x(\cos x-\sin x)}$

$\frac{\sin^2 x}{\cos x(\sin x-\cos x)}-\frac{\cos^2 x}{\sin x(\sin x-\cos x)}$

$=\frac{\sin^3 x-\cos^3 x}{\sin x\cos x(\sin x-\cos x)}$

$=\frac{(\sin x-\cos x)(\sin^2 x+\sin x\cos x+\cos^2 x)}{\sin x\cos x(\sin x-\cos x)}$

$=\frac{(\sin x-\cos x)(1+\sin x\cos x)}{\sin x\cos x(\sin x-\cos x)}$

$=\frac{1+\sin x\cos x}{\sin x\cos x}$

$=\frac{1}{\sin x\cos x}+1$

$=1+\sec x\csc x$

$=1+\sec x\csc x$

70. $\sin(-t)\sec(-t)=-\tan t$

$\frac{-\sin t}{}\times\frac{1}{\cos(-t)}=\frac{-\sin t}{\cos(-t)}$

$\cos(-t)=\cos t$ $=-\tan t$

71. $\frac{\cot(-x)}{\csc(-x)}=\cos x$

$=\frac{-\cot x}{\frac{1}{\sin(-x)}}=\frac{-\cot x}{-\csc x}$ → $\frac{\cos x}{\sin x}\times\frac{\sin x}{1}=\cos x$

تمارين (5-5) صفحة (129)

1. $\sin(x+\frac{\pi}{2})=\cos x$,

$\sin x\cos 90^\circ+\cos x\sin 90^\circ=\cos x$

($\cos 90^\circ = 0$)

2. $\cos(a+\frac{3\pi}{2})=\sin a$

$\cos a\cos 270^\circ+\sin a\sin 270^\circ=\sin a$

($\cos 270^\circ = 0$)

3. $\tan(a+\frac{\pi}{2})=-\cot a$

$\frac{\sin a\cos 90+\cos a\sin 90}{\cos a\cos 90-\sin a\sin 90}$

تقسيم على $\cos a\cos u$

$=\frac{\tan a+\tan u}{1-\tan a\tan u}=$ ______

$\frac{\tan a+\tan 90^\circ}{1-\tan a\tan 90^\circ}=-\cot a$

14. $\sin 3x = 3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x$

$\sin(2x+x) = \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x$

$2(\sin x \cos x)\cos x + (\cos^2 x - \sin^2 x)\sin x$

$2\sin x \cos^2 x + \sin \cos^2 x - \sin^3 x$

$3\sin x \cos^2 x - \sin^3 x$

16. $\tan 3u = \dfrac{\tan u(3-\tan^2 u)}{1-3\tan^2 u}$

$\tan(2u+u)$ $\qquad \tan 2u = \dfrac{2\tan u}{1-\tan^2 u}$

$= \dfrac{\tan 2u + \tan u}{1-\tan 2u \tan u}$

$\dfrac{2\tan u/(1-\tan^2 u) + \tan u}{1-\left(\frac{2\tan u}{1-\tan^2 u}\right)\tan u}$

15 $2\sin^2 2t + \cos 4t = 1$

$2(2\sin t \cos t)^2 + \cos^2 2t - \sin^2 2t$

$2\sin^2 2t + \cos^2 2t - \sin^2 2t$

$\sin^2 2t + \cos^2 2t = 1$

$\dfrac{2\tan u + \tan u(1-\tan^2 u)}{1-\tan^2 u}$

$= \dfrac{}{\dfrac{1-\tan^2 u - 2\tan^2 u}{1-\tan^2 u}}$

$= \dfrac{3\tan u - \tan^3 u}{1-3\tan^2 u}$

$= \dfrac{\tan u(3-\tan^2 u}{1-3\tan^2 u}$

1. $\dfrac{1-\cos A}{2\sin \frac{A}{2}} = \dfrac{1-\cos A}{2\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos A)}} = \sqrt{\dfrac{1-\cos A}{2}}$

③ $\sqrt{\dfrac{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}{2(1-\cos\theta)}} = \dfrac{\sin\theta}{\sqrt{4\left(\frac{1-\cos\theta}{2}\right)}}$

تمارين (٥-٤) صفحة 134

② $2\sin^2\frac{x}{2} + \cos x = 1$

$2\left(\dfrac{1-\cos x}{2}\right) + \cos x = 1$

4. $2\left(\dfrac{1-\cos x}{2}\right) + \cos x$

5. $\sqrt{1-2\cos A + \cos^2 A + \sin^2 A(\cos^2 B + \sin^2 B)} = \sqrt{2-2\cos A}$

6. $\tan\frac{A}{2} = \dfrac{\sin A}{1+\cos A}$

$\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{(1+\cos A)(1-\cos A)}{(1+\cos A)(1+\cos A)}}$

$= \sqrt{\dfrac{1-\cos^2 A}{(1+\cos A)^2}} = \sqrt{\dfrac{\sin^2 A}{(1+\cos A)^2}}$

$= \dfrac{\sin A}{1+\cos A}$

تمارين (٥-٥) صفحة 135 جزء اول

1. $\sin 12\theta + \sin 6\theta$
2. $\frac{1}{2}\cos 4\theta - \frac{1}{2}\cos 10\theta$
3. $\frac{1}{2}\cos 10u + \frac{1}{2}\cos 2u$
4. $\frac{3}{2}\sin 3x + \frac{3}{2}\sin x$
5. $2\cos 2\theta \sin 4\theta$
6. $-2\sin 4x \sin x$

صفحه 135 سؤال دوم

1. $\frac{\sin 4t + \sin 6t}{\cos 4t - \cos 6t} = \cot t$

$\frac{2\sin\left(\frac{4t+6t}{2}\right)\cos\left(\frac{4t-6t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{4t+6t}{2}\right)\sin\left(\frac{6t-4t}{2}\right)}$

$= \frac{2\sin 5t \cos(-t)}{(2\sin 5t)\sin t} = \frac{\cos t}{\sin t} = \cot t$

2. $\frac{\sin u + \sin v}{\cos u + \cos v} = \tan\frac{u+v}{2}$

$\frac{2\sin\left(\frac{u+v}{2}\right)\cos\left(\frac{u-v}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{u+v}{2}\right)\cos\left(\frac{u-v}{2}\right)}$

$\tan\left(\frac{u+v}{2}\right)$

3. $\frac{\sin u - \sin v}{\sin u + \sin v} = \frac{2\cos\left(\frac{u+v}{2}\right)\sin\left(\frac{u-v}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{u+v}{2}\right)\cos\left(\frac{u-v}{2}\right)}$

$2\cos\left(\frac{u+v}{2}\right)\cos\left(\frac{u-v}{2}\right)$ تقسیم کنید بر دو را ب

$= \frac{\tan\left(\frac{u-v}{2}\right)}{\tan\left(\frac{u+v}{2}\right)}$

4. $\sin 2x + \sin 4x + \sin 6x = 4\cos x \cos 2x \sin 3x$

$2\sin x\cos x + 2\sin 2x\cos 2x + 2\sin 3x\cos 3x$

$2\sin x\cos x\, 2(2\sin x\cos x)\cos 2x + 2\sin 3x[(2\sin x\cos x)\sin x - \cos x(2\sin x\cos x)]$

$2\sin x\cos x + 2(2\sin x\cos x)\cos 2x + 2\sin 3x[(\cos^2 x - \sin^2 x)\sin x - \cos(2\sin x\cos x)]$

$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$ // $\sin 6x = \sin 2(3x)$

$2\sin\left(\frac{2x+4x}{2}\right)\cos\left(\frac{2x-4x}{2}\right) + 2\sin 3x\cos 3x$

$2\sin 3x\cos(-x) + 2\sin 3x\cos 3x$ $\quad 4\cos x(\cos^2 x - \sin^2 x)\sin 3x$

$2\sin 3x\cos x + 2\sin 3x\cos 3x$

$2\sin 3x[\cos x + \cos 3x] = 2\sin 3x\left[2\cos\left(\frac{x+3x}{2}\right)\cos\left(\frac{x-3x}{2}\right)\right]$

$= 2\sin 3x[2\cos 2x\cos x] = \underline{4\cos x\cos 2x\sin 3x}$

صفحه 135 سؤال سوم جزوه

5. $(\sin ax)(\cos bx)$

$\frac{1}{2}\sin(a+b)x + \frac{1}{2}\sin(a-b)x$

6. $\sin(\theta + \pi) = -\sin\theta$

$\sin\theta\cos\pi + \cos\theta\sin\pi$

$\sin\theta(-1) + 0 = -\sin\theta$

7. $\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$

$= \frac{\tan\pi - \tan\theta}{1 + \tan\pi\tan\theta} = -\tan\theta$ ($\tan\pi = 0$)

136 سوالات فصل پنجم صفحه

1. $\sin(90+30) = \sin 90^\circ \cos 30 + \cos 90^\circ \sin 30 = \sqrt{3}/2$

2. $\sin 135 = \sin(180-45) = \sin 180^\circ \cos 45 - \cos 180 \sin 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

4. $\sin \frac{90}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos 90)} = \sqrt{1/2} = \sqrt{2}/2$

3. $\cos 180 = \cos 2(90) = \cos^2 90 - \sin^2 90 = 0-1 = -1$

5. $\sin 2x \cos 3x + \cos 2x \sin 3x = \sin 5x$

6. $4\sin 12x$, 7. $2\cos 12x$, 8. $\frac{\sin 52^\circ}{2\cos x}$, 9. $\sin 52^\circ$ 10. $\sin 92^\circ$

11. $\cos 6^\circ = .994$ 12. $\cos 164^\circ = -.96$ 13. $\frac{1/\cos x}{1/\sin x} = \tan x$

15. $\sin x \csc x - \sin^2 x = 1 - \sin^2 x$ 16. $\frac{1-\sin^2 A}{\sin} = \frac{\cos^2 A}{\sin A}$

17. $\cos A\left(\frac{\cos A}{\sin A}\right) + \sin A = \frac{\cos^2 A + \sin^2 A}{\sin A}$ 18. $\frac{(\sec^2 x - 1)(\sec^2 x + 1)}{\tan^2 x} = \sec^2 x + 1$

19. $2\left(\frac{1}{\sin 2x}\right)\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right) = 2\left(\frac{1}{2\sin x \cos x}\right)\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right) = \frac{1}{\sin^2 x}$

20. ? 21. $\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$, 22. $\frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\cos^2\theta} = 1 - \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$

23. $\frac{1}{2}\left(2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)$ 24. $\frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{(1+\sin x)(1-\sin x)}{\cos x(1-\sin x)} = \frac{1-\sin^2 x}{\cos x(1-\sin x)}$

25. $\cos[(x-y)+y]$, 26. $\sin 4x(\cos 4x)$

27. $\frac{\sin x}{\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x}} = \frac{\sin^2 x}{1-\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}$

28. ? 29. $\frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y + \sin x \cos y - \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y + \cos x \cos y + \sin x \sin y} = \frac{2\sin x \cos y}{2\cos x \cos y}$

1. $\cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1$

$\cos^2 A - (1 - \cos^2 A)$

2. $\sin 10t = 2\sin 5t \cos 5t$

$\sin 2A = 2\sin A \cos A$

$\sin 2(5t) = 2\sin 5t \cos 5t$

3. $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$

$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$

$(\cos^2 A - \sin^2 A)(\cos^2 A + \sin^2 A)$

$= \cos 2A$

4. $4\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2}) = 2\sin x$

$2[\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}]2$

$2\sin x = 4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

5. $\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x} = \tan x$

$\frac{2\sin x \cos x}{1 + 2\cos^2 x - 1} = \tan x$

6. $(\sin t + \cos t)^2 = 1 + \sin 2t$

$\sin^2 t + 2\sin t \cos t + \cos^2 t$

$1 + 2\sin t \cos t = 1 + \sin 2t$

7. $\frac{1 - \tan^2 x}{\sec^2 x} = \cos 2x$

$(1 - \tan^2 x)\cos^2 x = (1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x})\cos^2 x$

$= \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

8. $\sin 3u = \sin(3 - 4\sin^2 u)$

$(2\sin u \cos u)\cos u + (1 - 2\sin^2 u)\sin u$

$2\sin u \cos^2 u + \sin u - 2\sin^3 u$

$= \sin u(2\cos^2 u + 1 - 2\sin^2 u)$

$= \sin u[2(1 - \sin^2 u) + 1 - 2\sin^2 u)$

$= \sin(3 - 4\sin^2 u)$

9. $\cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$

$\cos 2(2\theta) = 2\cos^2 2\theta - 1$

$2[2\cos^2\theta - 1]^2 - 1$

$2[4\cos^4\theta - 4\cos^2\theta + 1] - 1$

$= 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$

10. $\sec 2x = \frac{\sec^2 x}{2 - \sec^2 x}$

$\frac{1}{\cos 2x} = \frac{1}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x - (1 - \cos^2 x)}$

$= \frac{1}{\cos^2 x - 1 + \cos^2 x} = \frac{1}{2\cos^2 x - 1}$

$\frac{1}{\frac{2}{\sec^2 x} - 1} = \frac{1}{\frac{2 - \sec^2 x}{\sec^2 x}}$

$= \frac{\sec^2 x}{2 - \sec^2 x}$

11. $\frac{1 + \tan^2 x}{\sec^2 x} = \cos 2x$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$\frac{2}{\sec^2 x} - 1 = \frac{2 - \sec^2 x}{\sec^2 x}$

$= \frac{2 - (1 + \tan^2 x)}{1 + \tan^2 x} = \frac{1 - \tan^2 x}{\sec^2 x}$

12. $2\csc 2x \tan x = \sec^2 x$

$\frac{2\tan x}{\sin 2x} = \frac{2\tan x}{2\sin x \cos x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x \cos x}$

$= \frac{\sin x}{\sin x \cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

13. $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2$

$\sin(2x + x) = \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x$

$(2\sin x \cos x)\cos x + (\cos^2 x - \sin^2 x)\sin x$

$2\sin x \cos^2 x + (\cos^2 x - \sin^2 x)\sin x$

$\sin x(2\cos^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x)$

$3\cos^2 x - \sin^2 x$

$\cos 3x = \cos(2x + x) =$

$\cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x$

$(\cos^2 x - \sin^2 x)\cos x - \sin x(2\sin x \cos x)$

$\cos x(\cos^2 x - \sin^2 x - 2\sin^2 x)$

$\cos^2 x - \sin^2 x - 2\sin^2 x = -(\cos^2 x - 3\sin^2 x)$

TABLE 2 Natural Exponential Function

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
0.00	1.0000	1.0000	2.50	12.182	0.0821
0.05	1.0513	0.9512	2.60	13.464	0.0743
0.10	1.1052	0.9048	2.70	14.880	0.0672
0.15	1.1618	0.8607	2.80	16.445	0.0608
0.20	1.2214	0.8187	2.90	18.174	0.0550
0.25	1.2840	0.7788	3.00	20.086	0.0498
0.30	1.3499	0.7408	3.10	22.198	0.0450
0.35	1.4191	0.7047	3.20	24.533	0.0408
0.40	1.4918	0.6703	3.30	27.113	0.0369
0.45	1.5683	0.6376	3.40	29.964	0.0334
0.50	1.6487	0.6065	3.50	33.115	0.0302
0.55	1.7333	0.5769	3.60	36.598	0.0273
0.60	1.8221	0.5488	3.70	40.447	0.0247
0.65	1.9155	0.5220	3.80	44.701	0.0224
0.70	2.0138	0.4966	3.90	49.402	0.0202
0.75	2.1170	0.4724	4.00	54.598	0.0183
0.80	2.2255	0.4493	4.10	60.340	0.0166
0.85	2.3396	0.4274	4.20	66.686	0.0150
0.90	2.4596	0.4066	4.30	73.700	0.0136
0.95	2.5857	0.3867	4.40	81.451	0.0123
1.00	2.7183	0.3679	4.50	99.017	0.0111
1.10	3.0042	0.3329	4.60	99.484	0.0101
1.20	3.3201	0.3012	4.70	109.95	0.0091
1.30	3.6693	0.2725	4.80	121.51	0.0082
1.40	4.0552	0.2466	4.90	134.29	0.0074
1.50	4.4817	0.2231	5.00	148.41	0.0067
1.60	4.9530	0.2019	6.00	403.43	0.0025
1.70	5.4739	0.1827	7.00	1096.6	0.0009
1.80	6.0496	0.1653	8.00	2981.0	0.0003
1.90	6.6859	0.1496	9.00	8103.1	0.0001
2.00	7.3891	0.1353	10.00	22026.0	0.00005
2.10	8.1662	0.1225			
2.20	9.0250	0.1108			
2.30	9.9742	0.1003			
2.40	11.0232	0.0907			

TABLE 3 Natural Logarithms

n	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0*		7.697	8.391	8.796	9.084	9.307	9.489	9.643	9.777	9.895
1	0.000	0.095	0.182	0.262	0.336	0.405	0.470	0.531	0.588	0.642
2	0.693	0.742	0.788	0.833	0.875	0.916	0.956	0.993	1.030	1.065
3	1.099	1.131	1.163	1.194	1.224	1.253	1.281	1.308	1.335	1.361
4	1.386	1.411	1.435	1.459	1.482	1.504	1.526	1.548	1.569	1.589
5	1.609	1.629	1.649	1.668	1.686	1.705	1.723	1.740	1.758	1.775
6	1.792	1.808	1.825	1.841	1.856	1.872	1.887	1.902	1.917	1.932
7	1.946	1.960	1.974	1.988	2.001	2.015	2.028	2.041	2.054	2.067
8	2.079	2.092	2.104	2.116	2.128	2.140	2.152	2.163	2.175	2.186
9	2.197	2.208	2.219	2.230	2.241	2.251	2.262	2.272	2.282	2.293
10	2.303	2.313	2.322	2.332	2.342	2.351	2.361	2.370	2.380	2.389

* Subtract 10 if $n < 1$; for example, $\ln 0.3 \approx 8.796 - 10 = -1.204$.

APPENDIX II Tables

TABLE 1 Common Logarithms

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732
1.5	.1761	.1790	.1818	.1847	.1875	.1903	.1931	[illegible]	.1987	.2014
1.6	.2041	.2068	.2095	.2122	.2148	.2175	.2201	.2227	.2253	.2279
1.7	.2304	.2330	.2355	.2380	.2405	.2430	.2455	.2480	.2504	.2529
1.8	.2553	.2577	.2601	.2625	.2648	.2672	.2695	.2718	.2742	.2765
1.9	.2788	.2810	.2833	.2856	.2878	.2900	.2923	.2945	.2967	.2989
2.0	.3010	.3032	.3054	.3075	.3096	.3118	.3139	.3160	.3181	.3201
2.1	.3222	.3243	.3263	.3284	.3304	.3324	.3345	.3365	.3385	.3404
2.2	.3424	.3444	.3464	.3483	.3502	.3522	.3541	.3560	.3579	.3598
2.3	.3617	.3636	.3655	.3674	.3692	.3711	.3729	.3747	.3766	.3784
2.4	.3802	.3820	.3838	.3856	.3874	.3892	.3909	.3927	.3945	.3962
2.5	.3979	.3997	.4014	.4031	.4048	.4065	.4082	.4099	.4116	.4133
2.6	.4150	.4166	.4183	.4200	.4216	.4232	.4249	.4265	.4281	.4298
2.7	.4314	.4330	.4346	.4362	.4378	.4393	.4409	.4425	.4440	.4456
2.8	.4472	.4487	.4502	.4518	.4533	.4548	.4564	.4579	.4594	.4609
2.9	.4624	.4639	.4654	.4669	.4683	.4698	.4713	.4728	.4742	.4757
3.0	.4771	.4786	.4800	.4814	.4829	.4843	.4857	.4871	.4886	.4900
3.1	.4914	.4928	.4942	.4955	.4969	.4983	.4997	.5011	.5024	.5038
3.2	.5051	.5065	.5079	.5092	.5105	.5119	.5132	.5145	.5159	.5172
3.3	.5185	.5198	.5211	.5224	.5237	.5250	.5263	.5276	.5289	.5302
3.4	.5315	.5328	.5340	.5353	.5366	.5378	.5391	.5403	.5416	.5428
3.5	.5441	.5453	.5465	.5478	.5490	.5502	.5514	.5527	.5539	.5551
3.6	.5563	.5575	.5587	.5599	.5611	.5623	.5635	.5647	.5658	.5670
3.7	.5682	.5694	.5705	.5717	.5729	.5740	.5752	.5763	.5775	.5786
3.8	.5798	.5809	.5821	.5832	.5843	.5855	.5866	.5877	.5888	.5899
3.9	.5911	.5922	.5933	.5944	.5955	.5966	.5977	.5988	.5999	.6010
4.0	.6021	.6031	.6042	.6053	.6064	.6075	.6085	.6096	.6107	.6117
4.1	.6128	.6138	.6149	.6160	.6170	.6180	.6191	.6201	.6212	.6222
4.2	.6232	.6243	.6253	.6263	.6274	.6284	.6294	.6304	.6314	.6325
4.3	.6335	.6345	.6355	.6365	.6375	.6385	.6395	.6405	.6415	.6425
4.4	.6435	.6444	.6454	.6464	.6474	.6484	.6493	.6503	.6513	.6522
4.5	.6532	.6542	.6551	.6561	.6571	.6580	.6590	.6599	.6609	.6618
4.6	.6628	.6637	.6646	.6656	.6665	.6675	.6684	.6693	.6702	.6712
4.7	.6721	.6730	.6739	.6749	.6758	.6767	.6776	.6785	.6794	.6803
4.8	.6812	.6821	.6830	.6839	.6848	.6857	.6866	.6875	.6884	.6893
4.9	.6902	.6911	.6920	.6928	.6937	.6946	.6955	.6964	.6972	.6981
5.0	.6990	.6998	.7007	.7016	.7024	.7033	.7042	.7050	.7059	.7067
5.1	.7076	.7084	.7093	.7101	.7110	.7118	.7126	.7135	.7143	.7152
5.2	.7160	.7168	.7177	.7185	.7193	.7202	.7210	.7218	.7226	.7235
5.3	.7243	.7251	.7259	.7267	.7275	.7284	.7292	.7300	.7308	.7316
5.4	.7324	.7332	.7340	.7348	.7356	.7364	.7372	.7380	.7388	.7396

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	.7404	.7412	.7419	.7427	.7435	.7443	.7451	.7459	.7466	.7474
5.6	.7482	.7490	.7497	.7505	.7513	.7520	.7528	.7536	.7543	.7551
5.7	.7559	.7566	.7574	.7582	.7589	.7597	.7604	.7612	.7619	.7627
5.8	.7634	.7642	.7649	.7657	.7664	.7672	.7679	.7686	.7694	.7701
5.9	.7709	.7716	.7723	.7731	.7738	.7745	.7752	.7760	.7767	.7774
6.0	.7782	.7789	.7796	.7803	.7810	.7818	.7825	.7832	.7839	.7846
6.1	.7853	.7860	.7868	.7875	.7882	.7889	.7896	.7903	.7910	.7917
6.2	.7924	.7931	.7938	.7945	.7952	.7959	.7966	.7973	.7980	.7987
6.3	.7993	.8000	.8007	.8014	.8021	.8028	.8035	.8041	.8048	.8055
6.4	.8062	.8069	.8075	.8082	.8089	.8096	.8102	.8109	.8116	.8122
6.5	.8129	.8136	.8142	.8149	.8156	.8162	.8169	.8176	.8182	.8189
6.6	.8195	.8202	.8209	.8215	.8222	.8228	.8235	.8241	.8248	.8254
6.7	.8261	.8267	.8274	.8280	.8287	.8293	.8299	.8306	.8312	.8319
6.8	.8325	.8331	.8338	.8344	.8351	.8357	.8363	.8370	.8376	.8382
6.9	.8388	.8395	.8401	.8407	.8414	.8420	.8426	.8432	.8439	.8445
7.0	.8451	.8457	.8463	.8470	.8476	.8482	.8488	.8494	.8500	.8506
7.1	.8513	.8519	.8525	.8531	.8537	.8543	.8549	.8555	.8561	.8567
7.2	.8573	.8579	.8585	.8591	.8597	.8603	.8609	.8615	.8621	.8627
7.3	.8633	.8639	.8645	.8651	.8657	.8663	.8669	.8675	.8681	.8686
7.4	.8692	.8698	.8704	.8710	.8716	.8722	.8727	.8733	.8739	.8745
7.5	.8751	.8756	.8762	.8768	.8774	.8779	.8785	.8791	.8797	.8802
7.6	.8808	.8814	.8820	.8825	.8831	.8837	.8842	.8848	.8854	.8859
7.7	.8865	.8871	.8876	.8882	.8887	.8893	.8899	.8904	.8910	.8915
7.8	.8921	.8927	.8932	.8938	.8943	.8949	.8954	.8960	.8965	.8971
7.9	.8976	.8982	.8987	.8993	.8998	.9004	.9009	.9015	.9020	.9025
8.0	.9031	.9036	.9042	.9047	.9053	.9058	.9063	.9069	.9074	.9079
8.1	.9085	.9090	.9096	.9101	.9106	.9112	.9117	.9122	.9128	.9133
8.2	.9138	.9143	.9149	.9154	.9159	.9165	.9170	.9175	.9180	.9186
8.3	.9191	.9196	.9201	.9206	.9212	.9217	.9222	.9227	.9232	.9238
8.4	.9243	.9248	.9253	.9258	.9263	.9269	.9274	.9279	.9284	.9289
8.5	.9294	.9299	.9304	.9309	.9315	.9320	.9325	.9330	.9335	.9340
8.6	.9345	.9350	.9355	.9360	.9365	.9370	.9375	.9380	.9385	.9390
8.7	.9395	.9400	.9405	.9410	.9415	.9420	.9425	.9430	.9435	.9440
8.8	.9445	.9450	.9455	.9460	.9465	.9469	.9474	.9479	.9484	.9489
8.9	.9494	.9499	.9504	.9509	.9513	.9518	.9523	.9528	.9533	.9538
9.0	.9542	.9547	.9552	.9557	.9562	.9566	.9571	.9576	.9581	.9586
9.1	.9590	.9595	.9600	.9605	.9609	.9614	.9619	.9624	.9628	.9633
9.2	.9638	.9643	.9647	.9652	.9657	.9661	.9666	.9671	.9675	.9680
9.3	.9685	.9689	.9694	.9699	.9703	.9708	.9713	.9717	.9722	.9727
9.4	.9731	.9736	.9741	.9745	.9750	.9754	.9759	.9763	.9768	.9773
9.5	.9777	.9782	.9786	.9791	.9795	.9800	.9805	.9809	.9814	.9818
9.6	.9823	.9827	.9832	.9836	.9841	.9845	.9850	.9854	.9859	.9863
9.7	.9868	.9872	.9877	.9881	.9886	.9890	.9894	.9899	.9903	.9908
9.8	.9912	.9917	.9921	.9926	.9930	.9934	.9939	.9943	.9948	.9952
9.9	.9956	.9961	.9965	.9969	.9974	.9978	.9983	.9987	.9991	.9996

TABLE 4 Values of the Trigonometric Functions

t	t degrees	sin t	cos t	tan t	cot t	sec t	csc t		
.0000	0°00′	.0000	1.0000	.0000		1.000		90°00′	1.5708
.0029	10	.0029	1.0000	.0029	343.8	1.000	343.8	50	1.5679
.0058	20	.0058	1.0000	.0058	171.9	1.000	171.9	40	1.5650
.0087	30	.0087	1.0000	.0087	114.6	1.000	114.6	30	1.5621
.0116	40	.0116	.9999	.0116	85.94	1.000	85.95	20	1.5592
.0145	50	.0145	.9999	.0145	68.75	1.000	68.76	10	1.5563
.0175	1°00′	.0175	.9998	.0175	57.29	1.000	57.30	89°00′	1.5533
.0204	10	.0204	.9998	.0204	49.10	1.000	49.11	50	1.5504
.0233	20	.0233	.9997	.0233	42.96	1.000	42.98	40	1.5475
.0262	30	.0262	.9997	.0262	38.19	1.000	38.20	30	1.5446
.0291	40	.0291	.9996	.0291	34.37	1.000	34.38	20	1.5417
.0320	50	.0320	.9995	.0320	31.24	1.001	31.26	10	1.5388
.0349	2°00′	.0349	.9994	.0349	28.64	1.001	28.65	88°00′	1.5359
.0378	10	.0378	.9993	.0378	26.43	1.001	26.45	50	1.5330
.0407	20	.0407	.9992	.0407	24.54	1.001	24.56	40	1.5301
.0436	30	.0436	.9990	.0437	22.90	1.001	22.93	30	1.5272
.0465	40	.0465	.9989	.0466	21.47	1.001	21.49	20	1.5243
.0495	50	.0494	.9988	.0495	20.21	1.001	20.23	10	1.5213
.0524	3°00′	.0523	.9986	.0524	19.08	1.001	19.11	87°00′	1.5184
.0553	10	.0552	.9985	.0553	18.07	1.002	18.10	50	1.5155
.0582	20	.0581	.9983	.0582	17.17	1.002	17.20	40	1.5126
.0611	30	.0610	.9981	.0612	16.35	1.002	16.38	30	1.5097
.0640	40	.0640	.9980	.0641	15.60	1.002	15.64	20	1.5068
.0669	50	.0669	.9978	.0670	14.92	1.002	14.96	10	1.5039
.0698	4°00′	.0698	.9976	.0699	14.30	1.002	14.34	86°00′	1.5010
.0727	10	.0727	.9974	.0729	13.73	1.003	13.76	50	1.4981
.0756	20	.0756	.9971	.0758	13.20	1.003	13.23	40	1.4952
.0785	30	.0785	.9969	.0787	12.71	1.003	12.75	30	1.4923
.0814	40	.0814	.9967	.0816	12.25	1.003	12.29	20	1.4893
.0844	50	.0843	.9964	.0846	11.83	1.004	11.87	10	1.4864
.0873	5°00′	.0872	.9962	.0875	11.43	1.004	11.47	85°00′	1.4835
.0902	10	.0901	.9959	.0904	11.06	1.004	11.10	50	1.4806
.0931	20	.0929	.9957	.0934	10.71	1.004	10.76	40	1.4777
.0960	30	.0958	.9954	.0963	10.39	1.005	10.43	30	1.4748
.0989	40	.0987	.9951	.0992	10.08	1.005	10.13	20	1.4719
.1018	50	.1016	.9948	.1022	9.788	1.005	9.839	10	1.4690
.1047	6°00′	.1045	.9945	.1051	9.514	1.006	9.567	84°00′	1.4661
.1076	10	.1074	.9942	.1080	9.255	1.006	9.309	50	1.4632
.1105	20	.1103	.9939	.1110	9.010	1.006	9.065	40	1.4603
.1134	30	.1132	.9936	.1139	8.777	1.006	8.834	30	1.4573
.1164	40	.1161	.9932	.1169	8.556	1.007	8.614	20	1.4544
.1193	50	.1190	.9929	.1198	8.345	1.007	8.405	10	1.4515
.1222	7°00′	.1219	.9925	.1228	8.144	1.008	8.206	83°00′	1.4486
		cos t	sin t	cot t	tan t	csc t	sec t	t degrees	t

t	t degrees	sin t	cos t	tan t	cot t	sec t	csc t		
.1222	7°00′	.1219	.9925	.1228	8.144	1.008	8.206	83°00′	1.4486
.1251	10	.1248	.9922	.1257	7.953	1.008	8.016	50	1.4457
.1280	20	.1276	.9918	.1287	7.770	1.008	7.834	40	1.4428
.1309	30	.1305	.9914	.1317	7.596	1.009	7.661	30	1.4399
.1338	40	.1334	.9911	.1346	7.429	1.009	7.496	20	1.4370
.1367	50	.1363	.9907	.1376	7.269	1.009	7.337	10	1.4341
.1396	8°00′	.1392	.9903	.1405	7.115	1.010	7.185	82°00′	1.4312
.1425	10	.1421	.9899	.1435	6.968	1.010	7.040	50	1.4283
.1454	20	.1449	.9894	.1465	6.827	1.011	6.900	40	1.4254
.1484	30	.1478	.9890	.1495	6.691	1.011	6.765	30	1.4224
.1513	40	.1507	.9886	.1524	6.561	1.012	6.636	20	1.4195
.1542	50	.1536	.9881	.1554	6.435	1.012	6.512	10	1.4166
.1571	9°00′	.1564	.9877	.1584	6.314	1.012	6.392	81°00′	1.4137
.1600	10	.1593	.9872	.1614	6.197	1.013	6.277	50	1.4108
.1629	20	.1622	.9868	.1644	6.084	1.013	6.166	40	1.4079
.1658	30	.1650	.9863	.1673	5.976	1.014	6.059	30	1.4050
.1687	40	.1679	.9858	.1703	5.871	1.014	5.955	20	1.4021
.1716	50	.1708	.9853	.1733	5.769	1.015	5.855	10	1.3992
.1745	10°00′	.1736	.9848	.1763	5.671	1.015	5.759	80°00′	1.3963
.1774	10	.1765	.9843	.1793	5.576	1.016	5.665	50	1.3934
.1804	20	.1794	.9838	.1823	5.485	1.016	5.575	40	1.3904
.1833	30	.1822	.9833	.1853	5.396	1.017	5.487	50	1.3875
.1862	40	.1851	.9827	.1883	5.309	1.018	5.403	20	1.3846
.1891	50	.1880	.9822	.1914	5.226	1.018	5.320	10	1.3817
.1920	11°00′	.1908	.9816	.1944	5.145	1.019	5.241	79°00′	1.3788
.1949	10	.1937	.9811	.1974	5.066	1.019	5.164	50	1.3759
.1978	20	.1965	.9805	.2004	4.989	1.020	5.089	40	1.3730
.2007	30	.1994	.9799	.2035	4.915	1.020	5.016	30	1.3701
.2036	40	.2022	.9793	.2065	4.843	1.021	4.945	20	1.3672
.2065	50	.2051	.9787	.2095	4.773	1.022	4.876	10	1.3643
.2094	12°00′	.2079	.9781	.2126	4.705	1.022	4.810	78°00′	1.3614
.2123	10	.2108	.9775	.2156	4.638	1.023	4.745	50	1.3584
.2153	20	.2136	.9769	.2186	4.574	1.024	4.682	40	1.3555
.2182	30	.2164	.9763	.2217	4.511	1.024	4.620	30	1.3526
.2211	40	.2193	.9757	.2247	4.449	1.025	4.560	20	1.3497
.2240	50	.2221	.9750	.2278	4.390	1.026	4.502	10	1.3468
.2269	13°00′	.2250	.9744	.2309	4.331	1.026	4.445	77°00′	1.3439
.2298	10	.2278	.9737	.2339	4.275	1.027	4.390	50	1.3410
.2327	20	.2306	.9730	.2370	4.219	1.028	4.336	40	1.3381
.2356	30	.2334	.9724	.2401	4.165	1.028	4.284	30	1.3352
.2385	40	.2363	.9717	.2432	4.113	1.029	4.232	20	1.3323
.2414	50	.2391	.9710	.2462	4.061	1.030	4.182	10	1.3294
.2443	14°00′	.2419	.9703	.2493	4.011	1.031	4.134	76°00′	1.3265
		cos t	sin t	cot t	tan t	csc t	sec t	t degrees	t

TABLE 4 Values of the Trigonometric Functions (cont

t	t degrees	sin t	cos t	tan t	cot t	sec t	csc t	\	
.2443	14°00′	.2419	.9703	.2493	4.011	1.031	4.134	76°00′	1.3265
.2473	10	.2447	.9696	.2524	3.962	1.031	4.086	50	1.3235
.2502	20	.2476	.9689	.2555	3.914	1.032	4.039	40	1.3206
.2531	30	.2504	.9681	.2586	3.867	1.033	3.994	30	1.3177
.2560	40	.2532	.9674	.2617	3.821	1.034	3.950	20	1.3148
.2589	50	.2560	.9667	.2648	3.776	1.034	3.906	10	1.3119
.2618	15°00′	.2588	.9659	.2679	3.732	1.035	3.864	75°00′	1.3090
.2647	10	.2616	.9652	.2711	3.689	1.036	3.822	50	1.3061
.2676	20	.2644	.9644	.2742	3.647	1.037	3.782	40	1.3032
.2705	30	.2672	.9636	.2773	3.606	1.038	3.742	30	1.3003
.2734	40	.2700	.9628	.2805	3.566	1.039	3.703	20	1.2974
.2763	50	.2728	.9621	.2836	3.526	1.039	3.665	10	1.2945
.2793	16°00′	.2756	.9613	.2867	3.487	1.040	3.628	74°00′	1.2915
.2822	10	.2784	.9605	.2899	3.450	1.041	3.592	50	1.2886
.2851	20	.2812	.9596	.2931	3.412	1.042	3.556	40	1.2857
.2880	30	.2840	.9588	.2962	3.376	1.043	3.521	30	1.2828
.2909	40	.2868	.9580	.2994	3.340	1.044	3.487	20	1.2799
.2938	50	.2896	.9572	.3026	3.305	1.045	3.453	10	1.2770
.2967	17°00′	.2924	.9563	.3057	3.271	1.046	3.420	73°00′	1.2741
.2996	10	.2952	.9555	.3089	3.237	1.047	3.388	50	1.2712
.3025	20	.2979	.9546	.3121	3.204	1.048	3.356	40	1.2683
.3054	30	.3007	.9537	.3153	3.172	1.049	3.326	30	1.2654
.3083	40	.3035	.9528	.3185	3.140	1.049	3.295	20	1.2625
.3113	50	.3062	.9520	.3217	3.108	1.050	3.265	10	1.2595
.3142	18°00′	.3090	.9511	.3249	3.078	1.051	3.236	72°00′	1.2566
.3171	10	.3118	.9502	.3281	3.047	1.052	3.207	50	1.2537
.3200	20	.3145	.9492	.3314	3.018	1.053	3.179	40	1.2508
.3229	30	.3173	.9483	.3346	2.989	1.054	3.152	30	1.2479
.3258	40	.3201	.9474	.3378	2.960	1.056	3.124	20	1.2450
.3287	50	.3228	.9465	.3411	2.932	1.057	3.098	10	1.2421
.3316	19°00′	.3256	.9455	.3443	2.904	1.058	3.072	71°00′	1.2392
.3345	10	.3283	.9446	.3476	2.877	1.059	3.046	50	1.2363
.3374	20	.3311	.9436	.3508	2.850	1.060	3.021	40	1.2334
.3403	30	.3338	.9426	.3541	2.824	1.061	2.996	30	1.2305
.3432	40	.3365	.9417	.3574	2.798	1.062	2.971	20	1.2275
.3462	50	.3393	.9407	.3607	2.773	1.063	2.947	10	1.2246
.3491	20°00′	.3420	.9397	.3640	2.747	1.064	2.924	70°00′	1.2217
.3520	10	.3448	.9387	.3673	2.723	1.065	2.901	50	1.2188
.3549	20	.3475	.9377	.3706	2.699	1.066	2.878	40	1.2159
.3578	30	.3502	.9367	.3739	2.675	1.068	2.855	30	1.2130
.3607	40	.3529	.9356	.3772	2.651	1.069	2.833	20	1.2101
.3636	50	.3557	.9346	.3805	2.628	1.070	2.812	10	1.2072
.3665	21°00′	.3584	.9336	.3839	2.605	1.071	2.790	69°00′	1.2043
		cos t	sin t	cot t	tan t	csc t	sec t	t degrees	t

t	t degrees	sin t	cos t	tan t	cot t	sec t	csc t		
.3665	21°00′	.3584	.9336	.3839	2.605	1.071	2.790	69°00′	1.2043
.3694	10	.3611	.9325	.3872	2.583	1.072	2.769	50	1.2014
.3723	20	.3638	.9315	.3906	2.560	1.074	2.749	40	1.1985
.3752	30	.3665	.9304	.3939	2.539	1.075	2.729	30	1.1956
.3782	40	.3692	.9293	.3973	2.517	1.076	2.709	20	1.1926
.3811	50	.3719	.9283	.4006	2.496	1.077	2.689	10	1.1897
.3840	22°00′	.3746	.9272	.4040	2.475	1.079	2.669	68°00′	1.1868
.3869	10	.3773	.9261	.4074	2.455	1.080	2.650	50	1.1839
.3898	20	.3800	.9250	.4108	2.434	1.081	2.632	40	1.1810
.3927	30	.3827	.9239	.4142	2.414	1.082	2.613	30	1.1781
.3956	40	.3854	.9228	.4176	2.394	1.084	2.595	20	1.1752
.3985	50	.3881	.9216	.4210	2.375	1.085	2.577	10	1.1723
.4014	23°00′	.3907	.9205	.4245	2.356	1.086	2.559	67°00′	1.1694
.4043	10	.3934	.9194	.4279	2.337	1.088	2.542	50	1.1665
.4072	20	.3961	.9182	.4314	2.318	1.089	2.525	40	1.1636
.4102	30	.3987	.9771	.4348	2.300	1.090	2.508	30	1.1606
.4131	40	.4014	.9159	.4383	2.282	1.092	2.491	20	1.1577
.4160	50	.4041	.9147	.4417	2.264	1.093	2.475	10	1.1548
.4189	24°00′	.4067	.9135	.4452	2.246	1.095	2.459	66°00′	1.1519
.4218	10	.4094	.9124	.4487	2.229	1.096	2.443	50	1.1490
.4247	20	.4120	.9112	.4522	2.211	1.097	2.427	40	1.1461
.4276	30	.4147	.9100	.4557	2.194	1.099	2.411	30	1.1432
.4305	40	.4173	.9088	.4592	2.177	1.100	2.396	20	1.1403
.4334	50	.4200	.9075	.4628	2.161	1.102	2.381	10	1.1374
.4363	25°00′	.4226	.9063	.4663	2.145	1.103	2.366	65°00′	1.1345
.4392	10	.4253	.9051	.4699	2.128	1.105	2.352	50	1.1316
.4422	20	.4279	.9038	.4734	2.112	1.106	2.337	40	1.1286
.4451	30	.4305	.9026	.4770	2.097	1.108	2.323	30	1.1257
.4480	40	.4331	.9013	.4806	2.081	1.109	2.309	20	1.1228
.4509	50	.4358	.9001	.4841	2.066	1.111	2.295	10	1.1199
.4538	26°00′	.4384	.8988	.4877	2.050	1.113	2.281	64°00′	1.1170
.4567	10	.4410	.8975	.4913	2.035	1.114	2.268	50	1.1141
.4596	20	.4436	.8962	.4950	2.020	1.116	2.254	40	1.1112
.4625	30	.4462	.8949	.4986	2.006	1.117	2.241	30	1.1083
.4654	40	.4488	.8936	.5022	1.991	1.119	2.228	20	1.1054
.4683	50	.4514	.8923	.5059	1.977	1.121	2.215	10	1.1025
.4712	27°00′	.4540	.8910	.5095	1.963	1.122	2.203	63°00′	1.0996
.4741	10	.4566	.8897	.5132	1.949	1.124	2.190	50	1.0966
.4771	20	.4592	.8884	.5169	1.935	1.126	2.178	40	1.0937
.4800	30	.4617	.8870	.5206	1.921	1.127	2.166	30	1.0908
.4829	40	.4643	.8857	.5243	1.907	1.129	2.154	20	1.0879
.4858	50	.4669	.8843	.5280	1.894	1.131	2.142	10	1.0850
.4887	28°00′	.4695	.8829	.5317	1.881	1.133	2.130	62°00′	1.0821
		cos t	sin t	cot t	tan t	csc t	sec t	t degrees	t

TABLE 4 Values of the Trigonometric Functions (cont'd.)

t	t degrees	sin t	cos t	tan t	cot t	sec t	csc t		
4887	28°00′	.4695	8829	.5317	1.881	1.133	2.130	62°00′	1.0821
4916	10	.4720	.8816	.5354	1.868	1.134	2.118	50	1.0792
4945	20	.4746	.8802	.5392	1.855	1.136	2.107	40	1.0763
.4974	30	.4772	.8788	.5430	1.842	1.138	2.096	30	1.0734
.5003	40	.4797	.8774	.5467	1.829	1.140	2.085	20	1.0705
.5032	50	.4823	.8760	.5505	1.816	1.142	2.074	10	1.0676
.5061	29°00′	.4848	8746	.5543	1.804	1.143	2.063	61°00′	1.0647
.5091	10	.4874	.8732	.5581	1.792	1.145	2.052	50	1.0617
.5120	20	.4899	.8718	.5619	1.780	1.147	2.041	40	1.0588
.5149	30	.4924	.8704	.5658	1.767	1.149	2.031	30	1.0559
.5178	40	.4950	.8689	.5696	1.756	1.151	2.020	20	1.0530
.5207	50	.4975	.8675	.5735	1.744	1.153	2.010	10	1.0501
.5236	30°00′	.5000	.8660	.5774	1.732	1.155	2.000	60°00′	1.0472
.5265	10	.5025	.8646	.5812	1.720	1.157	1.990	50	1.0443
.5294	20	.5050	.8631	.5851	1.709	1.159	1.980	40	1.0414
.5323	30	.5075	.8616	.5890	1.698	1.161	1.970	30	1.0385
.5352	40	.5100	.8601	.5930	1.686	1.163	1.961	20	1.0356
.5381	50	.5125	.8587	.5969	1.675	1.165	1.951	10	1.0327
.5411	31°00′	.5150	.8572	.6009	1.664	1.167	1.942	59°00′	1.0297
.5440	10	.5175	.8557	.6048	1.653	1.169	1.932	50	1.0268
.5469	20	.5200	.8542	.6088	1.643	1.171	1.923	40	1.0239
.5498	30	.5225	.8526	.6128	1.632	1.173	1.914	30	1.0210
.5527	40	.5250	.8511	.6168	1.621	1.175	1.905	20	1.0181
.5556	50	.5275	.8496	.6208	1.611	1.177	1.896	10	1.0152
.5585	32°00′	.5299	.8480	.6249	1.600	1.179	1.887	58°00′	1.0123
.5614	10	.5324	.8465	.6289	1.590	1.181	1.878	50	1.0094
.5643	20	.5348	.8450	.6330	1.580	1.184	1.870	40	1.0065
.5672	30	.5373	.8434	.6371	1.570	1.186	1.861	30	1.0036
.5701	40	.5398	.8418	.6412	1.560	1.188	1.853	20	1.0007
.5730	50	.5422	.8403	.6453	1.550	1.190	1.844	10	.9977
.5760	33°00′	.5446	.8387	.6494	1.540	1.192	1.836	57°00′	.9948
.5789	10	.5471	.8371	.6536	1.530	1.195	1.828	50	.9919
.5818	20	.5495	.8355	.6577	1.520	1.197	1.820	40	.9890
.5847	30	.5519	.8339	.6619	1.511	1.199	1.812	30	.9861
.5876	40	.5544	.8323	.6661	1.501	1.202	1.804	20	.9832
.5905	50	.5568	.8307	.6703	1.492	1.204	1.796	10	.9803
.5934	34°00′	.5592	.8290	.6745	1.483	1.206	1.788	56°00′	.9774
.5963	10	.5616	.8274	.6787	1.473	1.209	1.781	50	.9745
.5992	20	.5640	.8258	.6830	1.464	1.211	1.773	40	.9716
.6021	30	.5664	.8241	.6873	1.455	1.213	1.766	30	.9687
.6050	40	5688	.8225	.6916	1.446	1.216	1.758	20	9657
.6080	50	.5712	8208	.6959	1.437	1.218	1.751	10	.9628
.6109	35°00′	.5736	.8192	.7002	1.428	1.221	1.743	55°00′	.9599
		cos t	sin t	cot t	tan t	csc t	sec t	t degrees	t

t	t degrees	sin t	cos t	tan t	cot t	sec t	csc t		
.6109	35°00′	.5736	.8192	.7002	1.428	1.221	1.743	55°00′	9599
.6138	10	.5760	.8175	7046	1.419	1.223	1.736	50	.9570
.6167	20	.5783	.8158	.7089	1.411	1.226	1.729	40	.9541
.6196	30	.5807	.8141	.7133	1.402	1.228	1.722	30	.9512
.6225	40	.5831	.8124	.7177	1.393	1.231	1.715	20	.9483
.6254	50	.5854	.8107	.7221	1.385	1.233	1.708	10	.9454
.6283	36°00′	.5878	.8090	.7265	1.376	1.236	1.701	54°00′	9425
.6312	10	.5901	8073	.7310	1.368	1.239	1.695	50	9396
.6341	20	.5925	.8056	.7355	1.360	1.241	1.688	40	.9367
.6370	30	.5948	.8039	.7400	1.351	1.244	1.681	30	.9338
.6400	40	.5972	.8021	.7445	1.343	1.247	1.675	20	9308
.6429	50	.5995	.8004	7490	1.335	1.249	1.668	10	.9279
.6458	37°00′	.6018	.7986	.7536	1.327	1.252	1.662	53°00′	.9250
.6487	10	.6041	.7969	.7581	1.319	1.255	1.655	50	.9221
.6516	20	.6065	.7951	7627	1.311	1.258	1.649	40	.9192
.6545	30	.6088	.7934	.7673	1.303	1.260	1.643	30	.9163
.6574	40	.6111	.7916	.7720	1.295	1.263	1.636	20	.9134
.6603	50	.6134	.7898	7766	1.288	1.266	1.630	10	.9105
.6632	38°00′	.6157	.7880	.7813	1.280	1.269	1.624	52°00′	.9076
.6661	10	.6180	.7862	.7860	1.272	1.272	1.618	50	.9047
.6690	20	.6202	.7844	.7907	1.265	1.275	1.612	40	.0918
.6720	30	.6225	.7826	.7954	1.257	1.278	1.606	30	.8988
.6749	40	.6248	.7808	.8002	1.250	1.281	1.601	20	8959
.6778	50	.6271	.7790	.8050	1.242	1.284	1.595	10	.8930
.6807	39°00′	.6293	.7771	.8098	1.235	1.287	1.589	51°00′	.8901
.6836	10	.6316	.7753	.8146	1.228	1.290	1.583	60	.8872
.6865	20	.6338	.7735	.8195	1.220	1.293	1.578	40	.8843
.6894	30	.6361	.7716	.8243	1.213	1.296	1.572	30	.8814
.6923	40	.6383	.7698	8292	1.206	1.299	1.567	20	.8785
.6952	50	.6406	.7679	.8342	1.199	1.302	1.561	10	.8756
.6981	40°00′	.6428	.7660	8391	1.192	1.305	1.556	50°00′	.8727
.7010	10	.6450	.7642	8441	1.185	1.309	1.550	50	.8698
.7039	20	6472	.7623	8491	1.178	1.312	1.545	40	8668
.7069	30	.6494	.7604	8541	1.171	1.315	1.540	30	.8639
7098	40	.6417	.7585	8591	1.164	1.318	1.535	20	.8610
.7127	50	.6539	.7566	8642	1.157	1.322	1.529	10	.8581
7156	41°00′	.6561	.7547	8693	1.150	1.325	1.524	49°00′	.8552
.7185	10	.6583	7528	8744	1.144	1.328	1.519	50	.8523
.7214	20	.6604	.7509	8796	1.137	1.332	1.514	40	.8494
7243	30	.6626	.7490	.8847	1.130	1.335	1.509	30	8465
.7272	40	.6648	7470	8899	1.124	1.339	1.504	20	.8436
.7301	50	6670	7451	8952	1.117	1.342	1.499	10	8407
.7330	42°00′	.6691	.7431	.9004	1.111	1.346	1.494	48°00′	.8378
		cos t	sin t	cot t	tan t	csc t	sec t	t degrees	t

TABLE 4 Values of the Trigonometric Functions (cont'd.)

t	t degrees	sin t	cos t	tan t	cot t	sec t	csc t		
.7330	42°00′	6691	.7431	9004	1.111	1.346	1.494	48°00′	.8378
.7359	10	6713	.7412	.9057	1.104	1.349	1.490	50	.8348
7389	20	6734	.7392	9110	1.098	1.353	1.485	40	.8319
.7418	30	.6756	.7373	.9163	1.091	1.356	1.480	30	.8290
.7447	40	.6777	.7353	9217	1.085	1.360	1.476	20	.8261
7476	50	6799	.7333	9271	1.079	1.364	1.471	10	.8232
7505	43°00′	.6820	.7314	9325	1.072	1.367	1.466	47°00′	.8203
7534	10	6841	.7294	9380	1.066	1.371	1.462	50	.8174
7563	20	6862	.7274	9435	1.060	1.375	1.457	40	.8145
.7592	30	6884	.7254	.9490	1.054	1.379	1.453	30	.8116
.7621	40	6905	.7234	9545	1.048	1.382	1.448	20	.8087
7650	50	6926	.7214	9601	1.042	1.386	1.444	10	.8058
7679	44°00′	6947	.7193	9657	1.036	1.390	1.440	46°00′	.8029
.7709	10	6967	.7173	.9713	1.030	1.394	1.435	50	.7999
7738	20	6988	.7153	.9770	1.024	1.398	1.431	40	.7970
7767	30	.7009	.7133	9827	1.018	1.402	1.427	30	.7941
7796	40	.7030	.7112	9884	1.012	1.406	1.423	20	.7912
7825	50	.7050	7092	.9942	1.006	1.410	1.418	10	.7883
7854	45°00′	.7071	.7071	1.0000	1.0000	1.414	1.414	45°00′	.7854
		cos t	sin t	cot t	tan t	csc t	sec t	t degrees	t

۳ــ از تمرین (۱۷ــ الی ۲۸) ، زاویهٔ (θ) را برای هر قیمت معینه توسط کلکولیتر دریافت کنید ؟

17.	$\cos\theta = 0.326$	18.	$\tan\theta = 2.470$	19.	$\sin\theta = 0.9114$	20.	$\cos\theta\ 0.0427$
21.	$\tan\theta = 0.2074$	22.	$\sin\theta = 0.1095$	23.	$\cos\theta = 0.65007$	24.	$\tan\theta = 5.7706$
25.	$\csc\theta = 1.245$	26.	$\sec\theta = 2.045$	27.	$\cot\theta = 0.14434$	28.	$\csc\theta = 1.0125$

٤ـ از تمرین (۲۹ الی ۳۲) ، توابع مثلثاتی زاویه های ارأیه شده را از جدول مثلثاتی دریافت کنید ؟

29.	$\sin 19^\circ 0'$	30.	$\cos 43^\circ 0'$	31.	$\tan 67^\circ 20'$	32.	$\cot 76^\circ 50'$

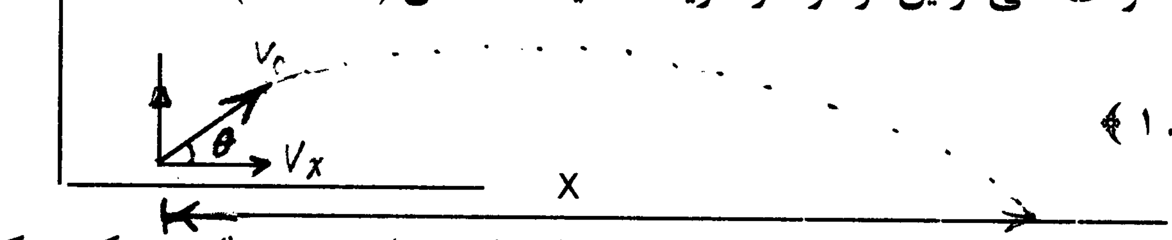
٥ـ ازتمرین (۳۳ الی ۳٦) با استفاده جدول مثلثاتی زاویه های (θ) را دریافت نما ئید

33,	$\tan\theta = 0.8441$	34.	$\sin\theta = 0.9175$	35.	$\cos\theta = 0.1260$	36.	$\tan\theta\ 1.523$

٦ـ از تمرین (۳۷ الی ٤۰) با اجرأ عملیهٔ انتر پولیشن (Linear Interpolation) توابع مثلثاتی را دریافت کنید؟ و همچنان از تمرین (٤۱ الی ٤٤) با استفاده عملیهٔ اینتر پولیشن (interpolation) زاویه های مطلوب را دریافت کنید ۰

37.	$\tan 28^\circ 56'$	38.	$\cos 48^\circ 44'$	39.	$\sin 61^\circ 15'$	40.	$\tan 53^\circ 12'$
41.	$\cos\theta = 0.2960$	42.	$\tan\theta = 0.1086$	43.	$\sin\theta = 0.5755$	44.	$\cot\theta = 0.8070$

۷ ــ مرمی که از زمین به هوا فیر میشود ، سرعت افقی آن با معا دلهٔ ذیل محاسبه شده میتوان : ($V_x = v_0 \cos\theta$) که در این رابطه (θ) عبارت از زاویهٔ است که ویکتور سرعت مزایل همرای افق میسازد ۰ اگر سرعت مزایل (225 ft/s) باشد وزاویهٔ ($\theta = 36^\circ$) ، سرعت افقی مزایل موصوف را دریافت کنید ؟ شکل (۱۵ ــ ۱) ۰



شکل ﴾ ۱۵ ــ ۱ ﴿

٤٦ـ ضریب استکاك یك جسم (بلاك فلزی) که بالای یك سطح مایل (چوبی) به سرعت ثابت حرکت میکند ، مساوی است به (tan θ) ۰ که درین جاه زاویه (θ) عبارت از زاویه سطح مایل همرای افق است ۰ اگر ضریب استکاك بین بلاك فلزی و سطح مایل چوبی (0.150) باشد ، زاویهٔ این سطح مایل را با سطح افقی دریافت کنید ؟

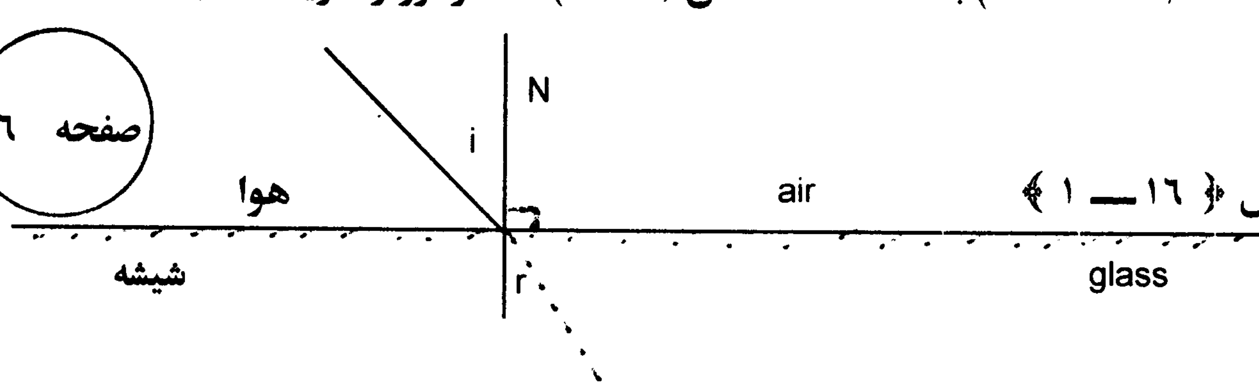
٤۷ــ ولتاژ تولیدی لحظوی در یك کوایل که در ساحهٔ مقناطیسی حرکت میکند ، به معادلهٔ ذیل ارائه گردیده است ۰ ($E = E\max \ (\cos a)$) ۰ درین معا دله ، (E max) عبارت از ولتا ژ اعظمی کوایل و زاویهٔ (a) عبارت از آن زاویه است که کوایل درین لحظه همرای ساحه مقناطیسی میسازد ۰ اگر در یك کوایل ولتاژ تولید شدهٔ اعظمی درین لحظه مساوی به(125.8 V) باشد ، ولتاژ تولید شدهٔ این کوایل را در صورت پیدا کنید که زاویهٔ کوایل و ساحه مقنا طیس ($a = 55.58^\circ$) باشد

٤۸ــ وقتیکه شعاع نور ازهوا به روی یك شیشه می تابد ، نور از شیشه عبور میکند واندکی طرف خط عمود که بالای نقطه تا بش رسم شده مایل میشود ۰ یا به عبارهٔ دیگر ، نور در شیشه انکسار میکند شکل (۱٦ ــ ۱)۰

اندکس (Index) انکسار نور ازرابطهٔ ذیل محاسبه میشود : ——— ($n = \sin i / \sin r$)

در صور تیکه ($r = 34.5^\circ$, $i = 59.0^\circ$) باشد ، شما اندکس (Index) انکسار نور را دریافت کنید ؟

صفحه ۱٦



شکل ﴾ ۱٦ ــ ۱ ﴿

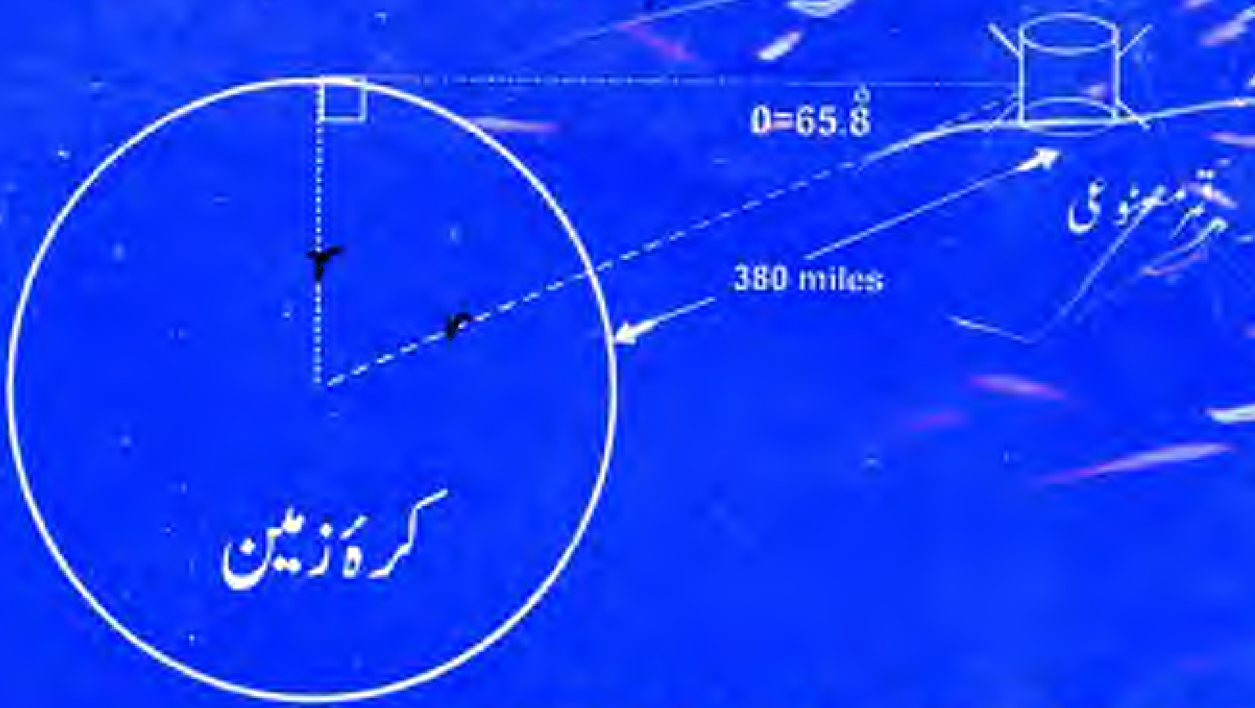
TABLE 5 Trigonometric Functions of Radians and Real Numbers

t	sin t	cos t	tan t	cot t	sec t	csc t	t	sin t	cos t	tan t	cot t	sec t	csc t
.00	.0000	1.0000	.0000		1.000		.40	.3894	.9211	.4228	2.365	1.086	2.568
.01	.0100	1.0000	.0100	99.997	1.000	100.00	.41	.3986	.9171	.4346	2.301	1.090	2.509
.02	.0200	.9998	.0200	49.993	1.000	50.00	.42	.4078	.9131	.4466	2.239	1.095	2.452
.03	.0300	.9996	.0300	33.323	1.000	33.34	.43	.4169	.9090	.4586	2.180	1.100	2.399
.04	.0400	.9992	.0400	24.987	1.001	25.01	.44	.4259	.9048	.4708	2.124	1.105	2.348
.05	.0500	.9988	.0500	19.983	1.001	20.01	.45	.4350	.9004	.4831	2.070	1.111	2.299
.06	.0600	.9982	.0601	16.647	1.002	16.68	.46	.4439	.8961	.4954	2.018	1.116	2.253
.07	.0699	.9976	.0701	14.262	1.002	14.30	.47	.4529	.8916	.5080	1.969	1.122	2.208
.08	.0799	.9968	.0802	12.473	1.003	12.51	.48	.4618	.8870	.5206	1.921	1.127	2.166
.09	.0899	.9960	.0902	11.081	1.004	11.13	.49	.4706	.8823	.5334	1.875	1.133	2.125
.10	.0998	.9950	.1003	9.967	1.005	10.02	.50	.4794	.8776	.5463	1.830	1.139	2.086
.11	.1098	.9940	.1104	9.054	1.006	9.109	.51	.4882	.8727	.5594	1.788	1.146	2.048
.12	.1197	.9928	.1206	8.293	1.007	8.353	.52	.4969	.8678	.5726	1.747	1.152	2.013
.13	.1296	.9916	.1307	7.649	1.009	7.714	.53	.5055	.8628	.5859	1.707	1.159	1.978
.14	.1395	.9902	.1409	7.096	1.010	7.166	.54	.5141	.8577	.5994	1.668	1.166	1.945
.15	.1494	.9888	.1511	6.617	1.011	6.692	.55	.5227	.8525	.6131	1.631	1.173	1.913
.16	.1593	.9872	.1614	6.197	1.013	6.277	.56	.5312	.8473	.6269	1.595	1.180	1.883
.17	.1692	.9856	.1717	5.826	1.015	5.911	.57	.5396	.8419	.6410	1.560	1.188	1.853
.18	.1790	.9838	.1820	5.495	1.016	5.586	.58	.5480	.8365	.6552	1.526	1.196	1.825
.19	.1889	.9820	.1923	5.200	1.018	5.295	.59	.5564	.8309	.6696	1.494	1.203	1.797
.20	.1987	.9801	.2027	4.933	1.020	5.033	.60	.5646	.8253	.6841	1.462	1.212	1.771
.21	.2085	.9780	.2131	4.692	1.022	4.797	.61	.5729	.8196	.6989	1.431	1.220	1.746
.22	.2182	.9759	.2236	4.472	1.025	4.582	.62	.5810	.8139	.7139	1.401	1.229	1.721
.23	.2280	.9737	.2341	4.271	1.027	4.386	.63	.5891	.8080	.7291	1.372	1.238	1.697
.24	.2377	.9713	.2447	4.086	1.030	4.207	.64	.5972	.8021	.7445	1.343	1.247	1.674
.25	.2474	.9689	.2553	3.916	1.032	4.042	.65	.6052	.7961	.7602	1.315	1.256	1.652
.26	.2571	.9664	.2660	3.759	1.035	3.890	.66	.6131	.7900	.7761	1.288	1.266	1.631
.27	.2667	.9638	.2768	3.613	1.038	3.749	.67	.6210	.7838	.7923	1.262	1.276	1.610
.28	.2764	.9611	.2876	3.478	1.041	3.619	.68	.6288	.7776	.8087	1.237	1.286	1.590
.29	.2860	.9582	.2984	3.351	1.044	3.497	.69	.6365	.771[illegible]	.8253	1.212	1.297	1.571
.30	.2955	.9553	.3093	3.233	1.047	3.384	.70	.6442	.7648	.8423	1.187	1.307	1.552
.31	.3051	.9523	.3203	3.122	1.050	3.278	.71	.6518	.7584	.8595	1.163	1.319	1.534
.32	.3146	.9492	.3314	3.018	1.053	3.179	.72	.6594	.7518	.8771	1.140	1.330	1.517
.33	.3240	.9460	.3425	2.920	1.057	3.086	.73	.6669	.7452	.8949	1.117	1.342	1.500
.34	.3335	.9428	.3537	2.827	1.061	2.999	.74	.6743	.7385	.9131	1.095	1.354	1.483
.35	.3429	.9394	.3650	2.740	1.065	2.916	.75	.6816	.7317	.9316	1.073	1.367	1.467
.36	.3523	.9359	.3764	2.657	1.068	2.839	.76	.6889	.7248	.9505	1.052	1.380	1.452
.37	.3616	.9323	.3879	2.578	4.073	2.765	.77	.6961	.7179	.9697	1.031	1.393	1.437
.38	.3709	.9287	.3994	2.504	1.077	2.696	.78	.7033	.7109	.9893	1.011	1.407	1.422
.39	.3802	.9249	.4111	2.433	1.081	2.630	.79	.7104	.7038	1.009	.9908	1.421	1.408

TABLE 5 Trigonometric Functions of Radians and Real Numbers (cont'd.)

t	sin t	cos t	tan t	cot t	sec t	csc t	t	sin t	cos t	tan t	cot t	sec t	csc t
.80	.7174	.6967	1.030	.9712	1.435	1.394	1.20	.9320	.3624	2.572	.3888	2.760	1.073
.81	.7243	.6895	1.050	.952[illegible]	1.450	1.381	1.21	.9356	.3530	2.650	.3773	2.833	1.069
.82	.7311	.6822	1.072	.9331	1.466	1.368	1.22	.9391	.3436	2.733	.3659	2.910	1.065
.83	.7379	.6749	1.093	.9146	1.482	1.355	1.23	.9425	.3342	2.820	.3546	2.992	1.061
.84	.7446	.6675	1.116	.8964	1.498	1.343	1.24	.9458	.3248	2.912	.3434	3.079	1.057
.85	.7513	.6600	1.138	.8785	1.515	1.331	1.25	.9490	.3153	3.010	.3323	3.171	1.054
.86	.7578	.6524	1.162	.8609	1.533	1.320	1.26	.9521	.3058	3.113	.3212	3.270	1.050
.87	.7643	.6448	1.185	.8437	1.551	1.308	1.27	.9551	.2963	3.224	.3102	3.375	1.047
.88	.7707	.6372	1.210	.8267	1.569	1.297	1.28	.9580	.2867	3.341	.2993	3.488	1.044
.89	.7771	.6294	1.235	.8100	1.589	1.287	1.29	.9608	.2771	3.467	.2884	3.609	1.041
.90	.7833	.6216	1.260	.7936	1.609	1.277	1.30	.9636	.2675	3.602	.2776	3.738	1.038
.91	.7895	.6137	1.286	.7774	1.629	1.267	1.31	.9662	.2579	3.747	.2669	3.878	1.035
.92	.7956	.6058	1.313	.7615	1.651	1.257	1.32	.9687	.2482	3.903	.2562	4.029	1.032
.93	.8016	.5978	1.341	.7458	1.673	1.247	1.33	.9711	.2385	4.072	.2456	4.193	1.030
.94	.8076	.5898	1.369	.7303	1.696	1.238	1.34	.9735	.2288	4.256	.2350	4.372	1.027
.95	.8134	.5817	1.398	.7151	1.719	1.229	1.35	.9757	.2190	4.455	.2245	4.566	1.025
.96	.8192	.5735	1.428	.7001	1.744	1.221	1.36	.9779	.2092	4.673	.2140	4.779	1.023
.97	.8249	.5653	1.459	.6853	1.769	1.212	1.37	.9799	.1994	4.913	.2035	5.014	1.021
.98	.8305	.5570	1.491	.6707	1.795	1.204	1.38	.9819	.1896	5.177	.1931	5.273	1.018
.99	.8360	.5487	1.524	.6563	1.823	1.196	1.39	.9837	.1798	5.471	.1828	5.561	1.017
1.00	.8415	.5403	1.557	.6421	1.851	1.188	1.40	.9854	.1700	5.798	.1725	5.883	1.015
1.01	.8468	.5319	1.592	.6281	1.880	1.181	1.41	.9871	.1601	6.165	.1622	6.246	1.013
1.02	.8521	.5234	1.628	.6142	1.911	1.174	1.42	.9887	.1502	6.581	.1519	6.657	1.011
1.03	.8573	.5148	1.665	.6005	1.942	1.166	1.43	.9901	.1403	7.055	.1417	7.126	1.010
1.04	.8624	.5062	1.704	.5870	1.975	1.160	1.44	.9915	.1304	7.602	.1315	7.667	1.009
1.05	.8674	.4976	1.743	.5736	2.010	1.153	1.45	.9927	.1205	8.238	.1214	8.299	1.007
1.06	.8724	.4889	1.784	.5604	2.046	1.146	1.46	.9939	.1106	8.989	.1113	9.044	1.006
1.07	.8772	.4801	1.827	.5473	2.083	1.140	1.47	.9949	.1006	9.887	.1011	9.938	1.005
1.08	.8820	.4713	1.871	.5344	2.122	1.134	1.48	.9959	.0907	10.983	.0910	11.029	1.004
1.09	.8866	.4625	1.917	.5216	2.162	1.128	1.49	.9967	.0807	12.350	.0810	12.390	1.003
1.10	.8912	.4536	1.965	.5090	2.205	1.122	1.50	.9975	.0707	14.101	.0709	14.137	1.003
1.11	.8957	.4447	2.014	.4964	2.249	1.116	1.51	.9982	.0608	16.428	.0609	16.458	1.002
1.12	.9001	.4357	2.066	.4840	2.295	1.111	1.52	.9987	.0508	19.670	.0508	19.695	1.001
1.13	.9044	.4267	2.120	.4718	2.344	1.106	1.53	.9992	.0408	24.498	.0408	24.519	1.001
1.14	.9086	.4176	2.176	.4596	2.395	1.101	1.54	.9995	.0308	32.461	.0308	32.476	1.000
1.15	.9128	.4085	2.234	.4475	2.448	1.096	1.55	.9998	.0208	48.078	.0208	48.089	1.000
1.16	.9168	.3993	2.296	.4356	2.504	1.091	1.56	.9999	.0108	92.620	.0108	92.626	1.000
1.17	.9208	.3902	2.360	.4237	2.563	1.086	1.57	1.0000	.0008	1255.8	.0008	1255.8	1.000
1.18	.9246	.3809	2.427	.4120	2.625	1.082							
1.19	.9284	.3717	2.498	.4003	2.691	1.077							

ریاضی، مثلثات



r=3944 mi = 6,347 km

Technical Trigonometry

for

Secondary High Schools

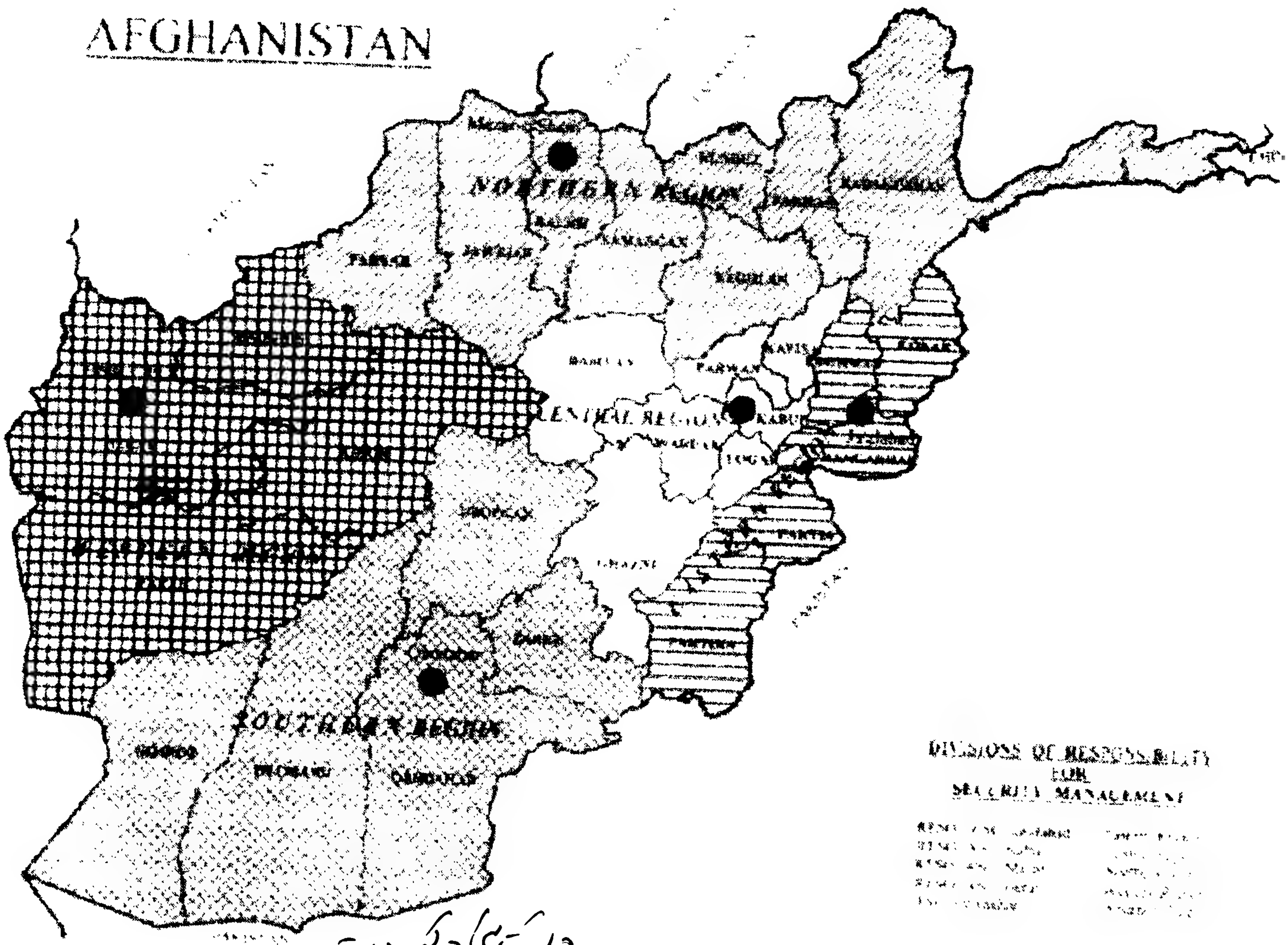
in

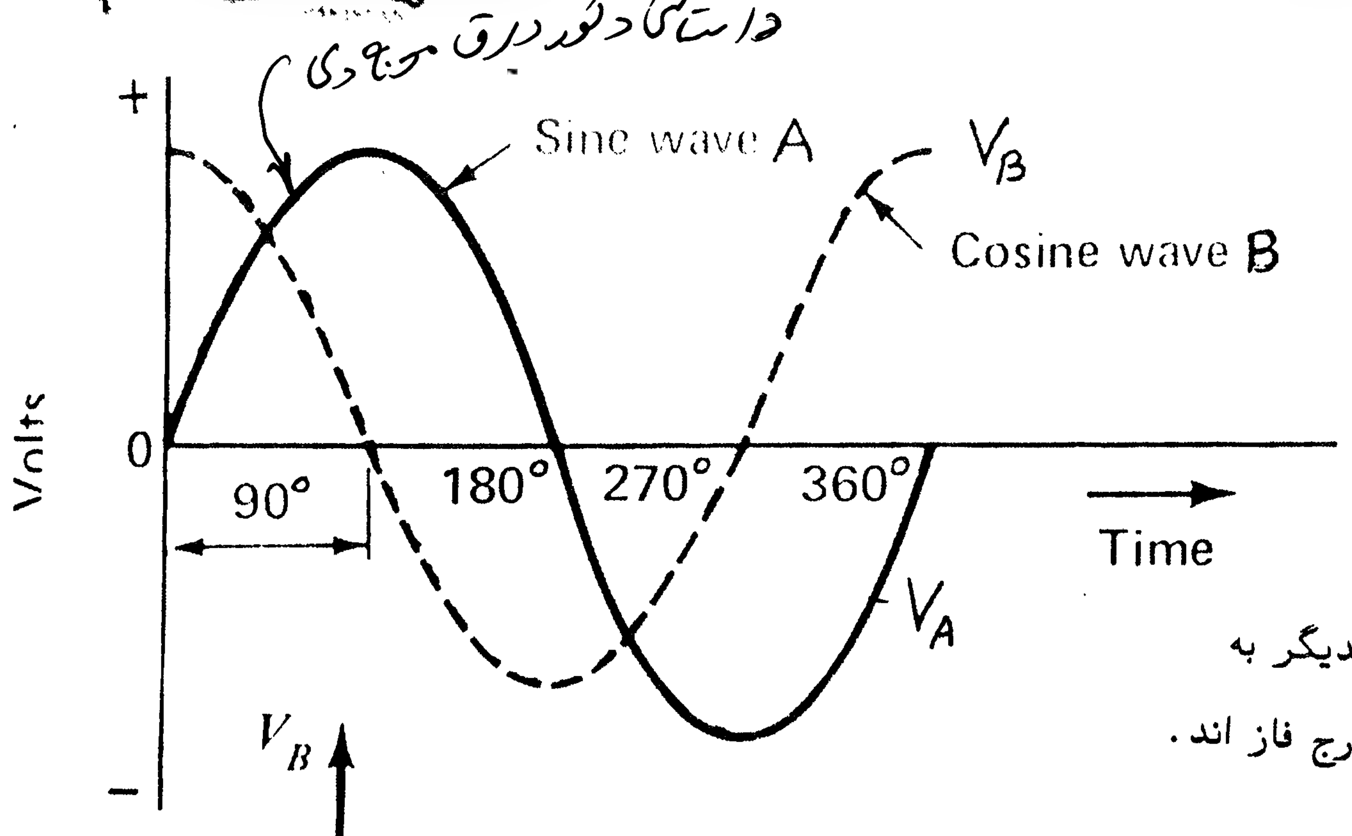
Afghanistan

By:

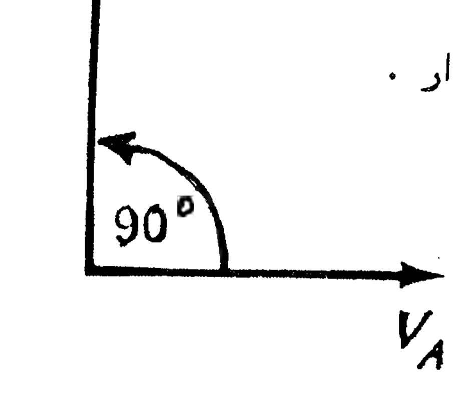
Prof.Eng. Nazar Mohd "Karyar"

August 2000





این دومنحنی از همدیگر به زاویه ۹۰ درجه خارج فاز اند.



شکل موجی ولتاژ وجریان در یك سرکت کپسیتر دار .

﴿ مثلث قایم الزاویه : ﴾

از دروس هندسه میدانیم ، که هر مثلث دارای سه ضلع و سه زاویه میباشد ۰ که به این حساب ، هر مثلث جمعاً شش جز دارد۰ هر گاه یك ضلع ودو جز دیگریك مثلث را بدانیم ، در آن صورت ما میتوانیم که سه جز دیگر آن را با استفاده علم مثلثات و هندسه معلوم نمائیم ۰در صورتیکه ، در جمله سه جز معلوم یکی آن ضلع باشد ۰ یعنی یك ضلع و دوزاویهٔ یك مثلث را بدانیم، زاویهٔ سوم آنرا به اساس این مفهوم که مجموع زاویه های داخلی یك مثلث (180°) درجه است دریافت کرده میتوانیم ۰

مفهوم حل مثلث :

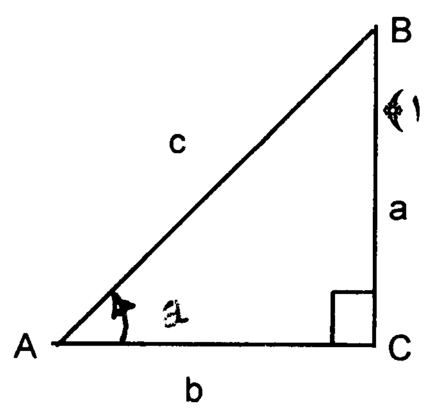
وقتیکه میگوئیم مثلث را حل کنید ، به این مفهوم است که اگر دو زاویهٔ و یك ضلع یك مثلث معلوم با شد ، ما دیگر اجزای آن را دریافت میکنیم و میگوئیم که مثلث را حل مینمائیم ۰

درین بخش ، میخواهیم مثلث قایم الزاویه را مورد بحث قرار بدیهیم ۰ به خاطر داشته باشید که هر گاه در یك مثلث قایم الزاویه صرف (دو جز) یك زاویه و یك جز دیگر را داشته باشیم ، میتوانیم مثلث موصوف را حل نمائیم ۰ میدانیم که مجموع زاویه های داخلی یك مثلث (180°) میباشد ، چون یك زاویهٔ آن (90°) بوده ـ لذا مجموع دوزاویه دیگر آن نیز (90°) میشوند ۰

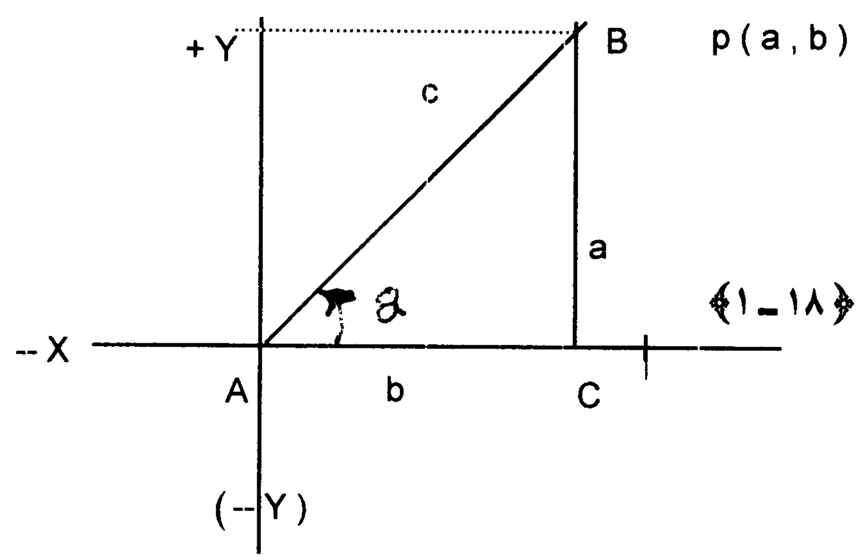
دو زاویهٔ حاده که مجموع آنها (90°) باشد ، این دو زاویه ، مکملهٔ (Complementary) یك دیگر اند۰

معمولاً ، رأس های مثلث قایم الزاویه را با حروف بزرگ (C , B , A) و اضلاع آنرا در مقابل هر رأ س با التر تیب با حروف کوچك (c , b, a)نشان میدهند۰ درین جاه ضلع (c) را وتر (hypotenuse) مثلث می نامند ۰ شکل (۱۷ ـ ۱) ۰ واگر رأ س (A) مثلث را در مبدأ محور های (X) و (Y) قرار بدیهیم---- شکل (۱۸ ـ ۱)۰ تمام توابع مثلثاتی زاویهٔ (A) را چنین نوشته کرده میتوانیم :

$\sin A = a / c$, $\cos A = b / c$, $\tan A = a / b$, $\cot A = b / a$, $\sec A = c / b$, $\csc A = c / a$



شکل ﴿۱۷ ـ ۱﴾



شکل ﴿۱۸ ـ ۱﴾

حال ، تعریفات خود را مختصر ساخته ، توابع مثلثاتی را برای یك زاویهٔ حادهٔ (a) در یك مثلث قایم الزاویه تعریف جامع میدیهیم:

$$\sec a = \frac{\text{طول وتر مثلث}}{\text{طول ضلع مجاور زاویه}} \qquad \sin a = \frac{\text{طول ضلع مقابل زاویه}}{\text{طول وتر مثلث}} \qquad \tan a = \frac{\text{طول ضلع مقابل زاویه}}{\text{طول ضلع مجاور زاویه}}$$

$$\cos a = \frac{\text{طول ضلع مجاور زاویه}}{\text{طول وتر مثلث}} \qquad \csc a = \frac{\text{طول وتر مثلث}}{\text{طول ضلع مقابل زاویه}} \qquad \cot a = \frac{\text{طول ضلع مجاور زاویه}}{\text{طول ضلع مقابل زاویه}}$$

از توضیح و تحلیل تمرینات فوق روابط ذیل را به دست آورده میتوانیم :

در یك مثلث قایم الزاویه ، چون زاویه های (A) و (B) مکملهٔ یکدیگر اند ، لذا داریم که :

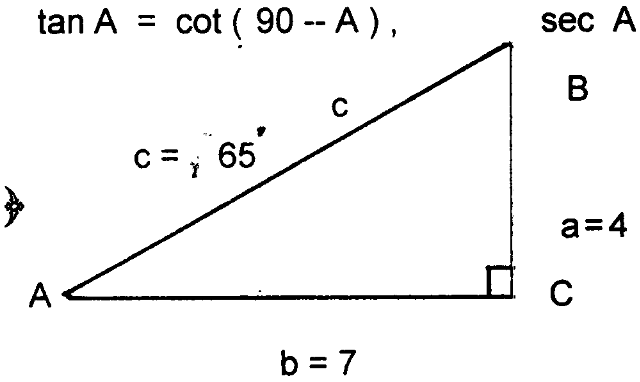
$\sin A = \cos B$, $\tan A = \cot B$, $\sec A = \csc B$

به عبارهٔ دیگر ، در زاویه های مکمله ، ($\sin A$) مساوی به ($\cos B$) ، ($\tan A$) مساوی به ($\cot B$) و ($\sec A$) مساوی به ($\csc B$) میشوند ۰

مطلب فوق را چنین خلاصه کرده میتوانیم :

$\sin A = \cos(90 - A)$, $\tan A = \cot(90 - A)$, $\sec A = \csc(90 - A)$

شکل (۱۹ ــ ۱) مطالعه کنید ۰



﴿ شکل (۱۹ ــ ۱) ﴾

معلوم است ؟ $C = 90^\circ$ $c = \sqrt{65}$, $b = 7$, $a = 4$,

مجهول است ؟ $\sin A = ?$, $\cos A = ?$, $\tan A = ?$ $\sin B = ?$ $\cos B = ?$, $\tan b = ?$

حل :

$\sin A = 4/\sqrt{65} = 0.496$, $\cos A = 7/\sqrt{65} = 0.868$, $\tan A = 4/7 = 0.571$

$\sin B = 7/\sqrt{65} = 0.868$ $\cos B = 4/\sqrt{65} = 0.496$ $\tan B = 7/4 = 1.75$

چون ، مجموع زاویه های (A) و (B) مساوی به (90°) درجه میشود ۰

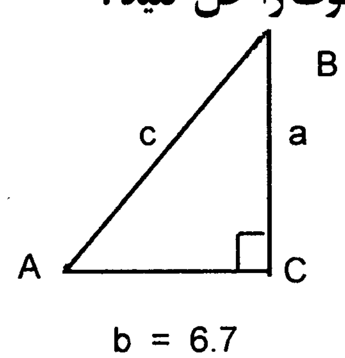
لذا :

$\sin A = \cos B$, $\tan A = \cot B$, $\sec A = \csc B$

با فرا گرفتن موضوعات مثلثات تا به این سرحد ، اکنون ما قادر هستیم که مثلث قایم الزاویه را حل نمائیم ۰

مثال : دو جز یك مثلث قایم الزاویه ، داده شده، مثلث موصوف را حل کنید ؟ شکل (۲۰ ــ ۱)

$b = 6.70$ $A = 50.0^\circ$



شکل ﴿ ۲۰ ــ ۱ ﴾

حل : چون : $(\tan A = a/b$, or $a = b \tan A)$

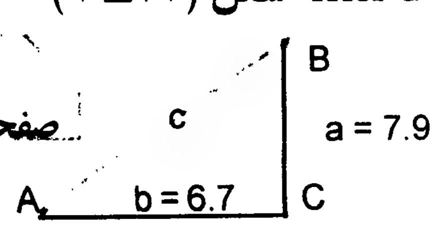
حال ، قیمت های داده شده را در معادله فوق تعویض مینمائیم :

ذریعهٔ کلکولیتر حل مینمائیم $a = 6.70\ (\tan 50.0^\circ) = 6.7 \times 50$ (Tan) $= 7.98$

از طرف دیگر ، $(B = 90^\circ - 50^\circ = 40.0^\circ)$ $\cos A = b/c$,

لهذا : $(c = b/\cos A$, $c = 6.7/\cos 50^\circ = 10.4)$

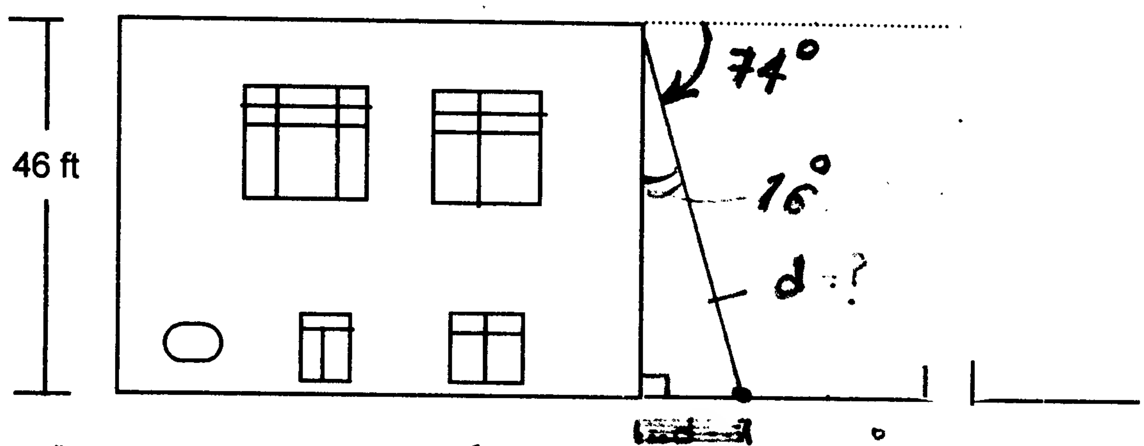
جواب $a = 7.98$, $c = 10.4$, $B = 40^\circ$ ...... شکل (۲۱ ــ ۱)



شکل ﴿ ۲۱ ــ ۱ ﴾

مثال دوم : از بام یك تعمیر که ارتفاع آن (46 ft) است ، زاویهٔ دیپریشن (Angle of depression) (74°) را با یك موتر که در سرك موقعیت دارد میسازد. معلوم کنید که موتر از بام چقدر دور است ؟ -- شکل (٢٥ ــ ١)

حل - ($\cos 16^\circ = 46 / d$, $d = 46 / \cos 16^\circ = 47.9$ ft , $d = 46 / 0.9612 = 47.9'$)



شکل ﴿٢٥ ــ ١﴾

مثال سوم : یك مرمی میزایل از سطح زمین به زاویهٔ (26.55°) فایر گردیده است. اگر این مرمی برای مدت دو دقیقه بالای مسیر مستقیم به سرعت اوسط (V ave. = 6355 km / hour) حرکت کند، ارتفاع مزایل بعد ازدو دقیقه چقدر خواهد بود ؟   شکل (٢٦ ــ ١).

حل : (الف) تبدیل واحدات ، چون یك ساعت مساوی است به ٦٠ دقیقه ، دو دقیقه مساوی میشود به (١ بر ٣٠) حصهٔ ساعت

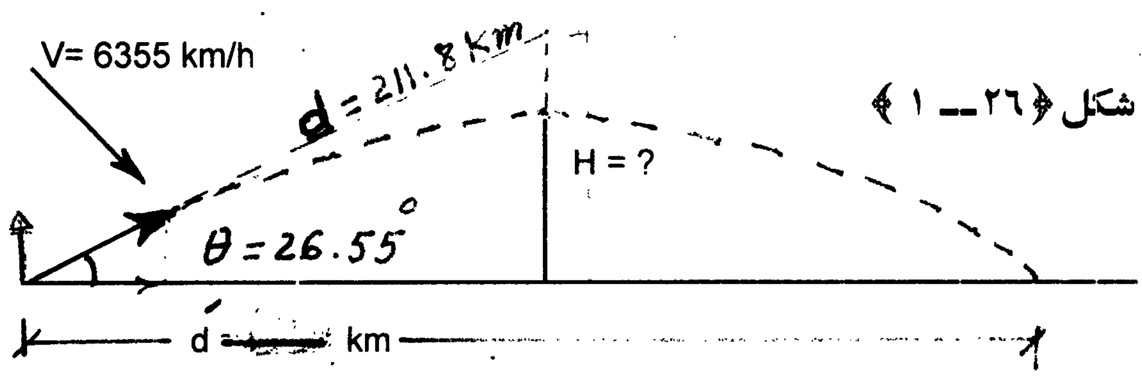
$$d = (6355 \text{ km} / h)(1\text{-}h / 30) = 211.8 \text{ km}$$

$$\sin 26.55^\circ = H / d , \quad H = d (\sin 26.55^\circ)$$

حال نظر به تابع مثلثاتی داریم که :

$$\text{or } H = (211.8)(\sin 26.55^\circ)$$

$$= 211.8 \times 0.4469 = 94.67 \text{ km}$$



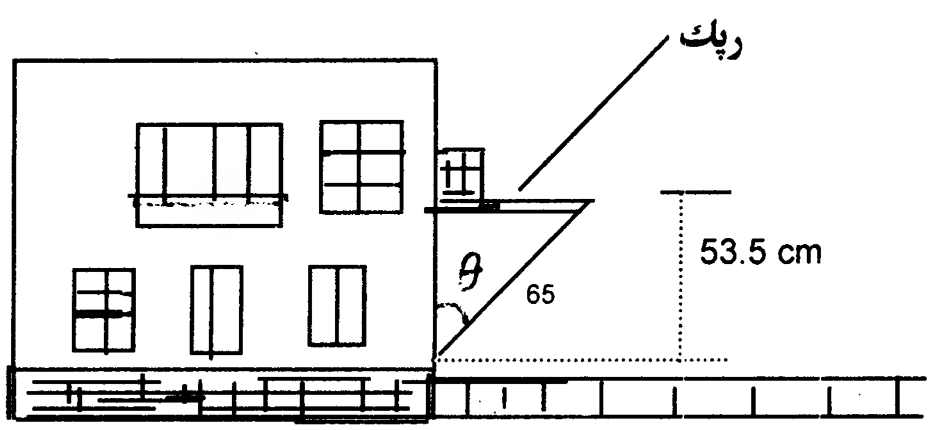
شکل ﴿٢٦ ــ ١﴾

مثال سوم : یك تکیه گاه (رپك) برای نصب کردن ایر کاندیشنینگ (Window air condidtioning) در کلکین یك تعمیر ساخته میشود. شکل (٢٧ ــ ١)- طول چوب که در زیر رپك نصب میگردد (65 cm) است. زاویه بین چوب و دیوار را دریافت کنید ؟

$$\cos\theta = \frac{53.5}{65.0} = 0.8231$$

$$\theta = 34.6^\circ$$

جواب



شکل ﴿٢٧ ــ ١﴾

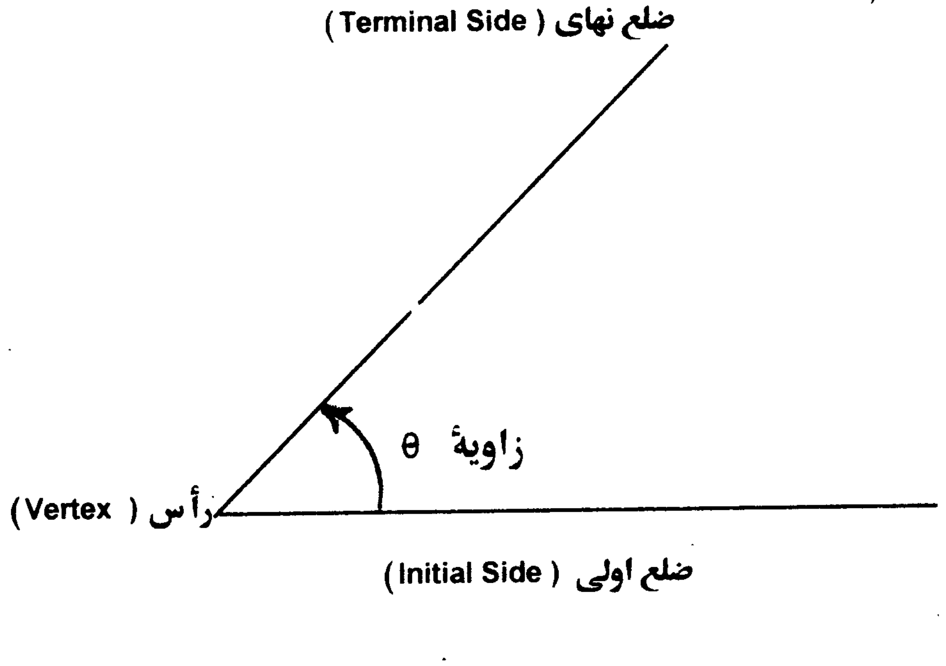
فصل اول

﴿ توابع مثلثاتی ﴾

پرابلم های عملی در ساحات ساینس و تیکنالوژی اکثراً با استفاده از مثلثات، که یك شعبهٔ جداگانهٔ علم ریاضی میباشد، حل میشوند. مثلثات، طوری که از نامش پیدا ست، با مطالعهٔ مثلث و بلخاصه (مثلث قایم الزاویه) آغاز میشود.
طول فاصله ها ئیکه تعین آنها نظر به مشکلات و ممانعات های فزیکی، مانند: کوه، دریا و فضأنا ممکن باشد، با استفاده از علم مثلثات میتوانیم آنرا بدون آنکه به خود محل برویم معلوم کنیم.
ارتفاع کوه، ارتفاع درخت، عرض دریا، ارتفاع تعمیر، ارتفاع طیاره، ارتفاع آنتن ها، برجها، مناره ها، و همچنان پرابلم های فزیك در بارهٔ قوه ها، سرعت، تعجیل و حرکت وامثال آن، صرف از طریق مثلثات حل شده میتوانند. همچنان در رشتهٔ برق، اکثر مسایل زیادبه کمك مثلثات حل میگردد.
خواص اساسی مثلث قایم الزاویه به ما اجازه میدهد که بعضی روابط اساسی را که توابع مثلثاتی نامیده میشوند، میان زاویه ها و اضلاع های آن ایجاد کنیم. همین توابع اند که انکشاف علم ریاضی(مثلثات) را بنیان گزاری نموده، در ساحهٔ تیکنالوژی سهولت های لازم را فراهم ساخته است.
درین فصل ما اساسات توابع مثلثاتی را با کار برد تعریفات ابتدائ آن معرفی می کنیم. در فصل های بعدی، سایر موضوعات مثلثات را مورد بحث قرار میدهیم. اینك بحث خود را با توضیح مفهوم زاویه آغاز می نمأیم. ﴾

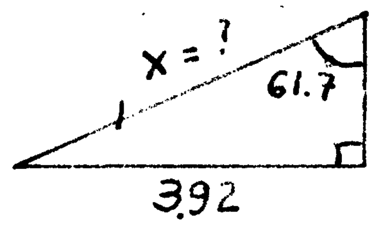
زاویه (Angle): تعریف زاویه :

زاویه از حرکت دورانی یك نیم خط که به یك انجام خود از حالت اولی به حالت نهائ دوران کند، تشکیل میشود.
نیم خط، آن حصهٔ یك خط مستقیم است که در امتداد خود به یك نقطه(انجام) آن ثابت و محکم بوده باشد.
حالت اولی این نیم خط را بنام ضلع اولی(Initial side) زاویه و حالت دومی این خط را بعد از یك حرکت دورانی ضلع نهائی بنام ضلع دومی (Terminal Side) زاویه یاد میکنند. شکل (۱-۱)

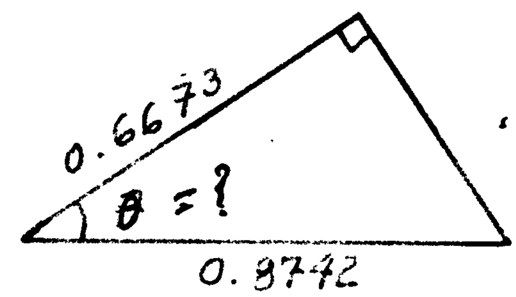


شکل ﴿ ۱ ــ ۱ ﴾

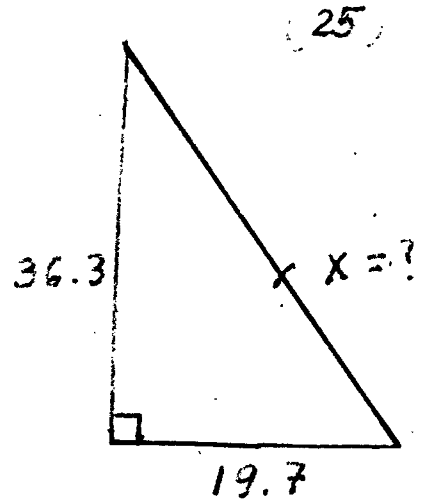
از تمرین (۲۵ الی ۲۸) اجزأ مجهول چار مثلث ترسیم شده را که با الفبأ لاتین (X , A) نشان داده شده است دریافت کنید



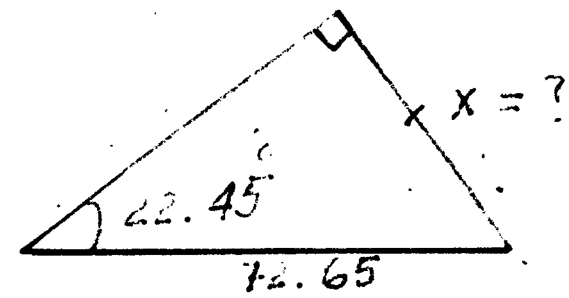
(25)



26



27



(28)

از تمرین (۲۹ الی ۳۲) مثلث های قایم الزاویه را حل نمأید که دو جز مثلث داده شده است؟

29. B = 37.40 , a = 0.886   30. A = 70°10′ , a = 137   31. b = 86.7 , c = 167

32. a = 6.85 , b = 2.12

مطابق شکل (۲۳ــ۱) قبلی ، دو جز مثلث به حروف لاتین در ذیل داده شده است ۰ اجزأ مجهول دیگر مثلث را بادر نظر داشت اجزأ معلوم داده شدهٔ ذیل توجه دهید؟ اجزأ معلوم مثلث قایم الزاویه عبارت اند از :

33. A , c   34. a , b   35. B , a   36. b , c

سوالات مربوط به تطبیق مثلثات در ساحهٔ عملی

تطبیق مثلث قایم الزاویه در ساحه :

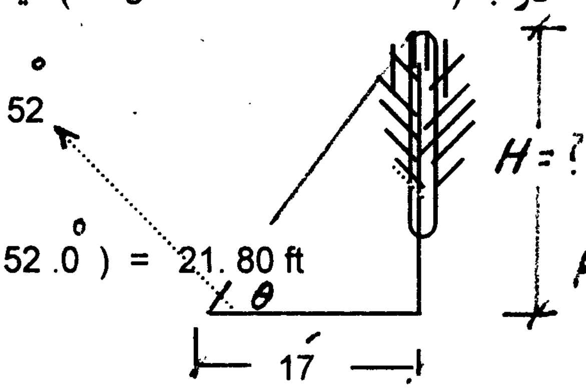
بسیاری از سوالات فزیك ، میخانیك و انجینری در ساحهٔ کار با استفادهٔ حل مثلث قایم الزاویه حل میگردند ـ مثال های ذیل جنبهٔ تطبیقی مثلثات را برجسته میسازند ۰

مثال اول : در شکل ذیل (۲٤ــ۱) یك درخت نشان داده شده که طول سایهٔ آن بالای یك سطح هموار به طول (17) فت است ۰ و نوك سایهٔ درخت با قلهٔ درخت زاویهٔ ۵۲ درجه (Angle of elevation = 52) میسا زد، بلندی درخت را دریافت کنید؟

حل : (Angle of elevation = 52°)

(tan 52.0° = h / 17.0′)

به کلکولیتر حل کنید ، H = (17 X 52 [tan] = 21.8′)

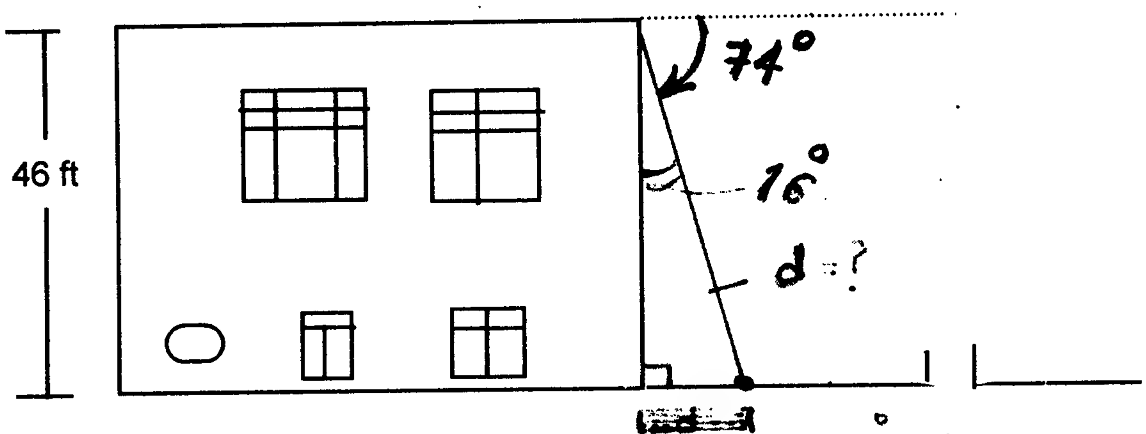


(h = 17′ (tan 52.0°) = 21.80 ft

شکل (۲٤ــ۱)

مثال دوم : از بام یك تعمیر که ارتفاع آن (46 ft) است ، زاویهٔ دیپریشن (Angle of depression) (74°) را با یك موتر که در سرك موقعیت دارد میسازد ۰ معلوم کنید که موتر از بام چقدر دور است ؟ -- شکل (۲۵ ــ ۱)

حل - ($\cos 16^{\circ} = 46 / d$, $d = 46 / \cos 16^{\circ} = 47.9$ ft , $d = 46 / 0.9612 = 47.9$)



شکل ﴿۲۵ ــ ۱﴾

مثال سوم : یك مرمی میزایل از سطح زمین به زاویهٔ (26.55°) فایر گردیده است ۰ اگر این مرمی برای مدت دو دقیقه بالای مسیر مستقیم به سرعت اوسط (V ave. = 6355 km / hour) حرکت کند ، ارتفاع مزایل بعد ازدو دقیقه چقدر خواهد بود ؟ شکل (۲٦ ــ ۱) ۰

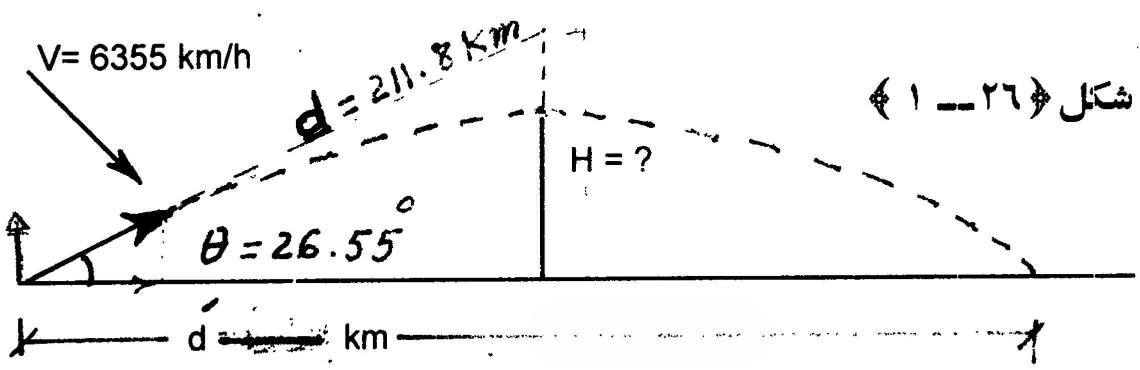
حل : (الف) تبدیل واحدات ، چون یك ساعت مساوی است به ٦۰ دقیقه ، دو دقیقه مساوی میشود به (۱ بر ۳۰) حصهٔ ساعت

$d = (6355 \text{ km} / \text{h}) (1\text{-h} / 30 .) = 211.8$ km

$\sin 26.55^{\circ} = H / d$, $H = d (\sin 26.55^{\circ})$

حال نظر به تابع مثلثاتی داریم که : or $H = (211.8) (\sin 26.55^{\circ})$

$= 211.8 \times 0.4469 = 94.67$ km



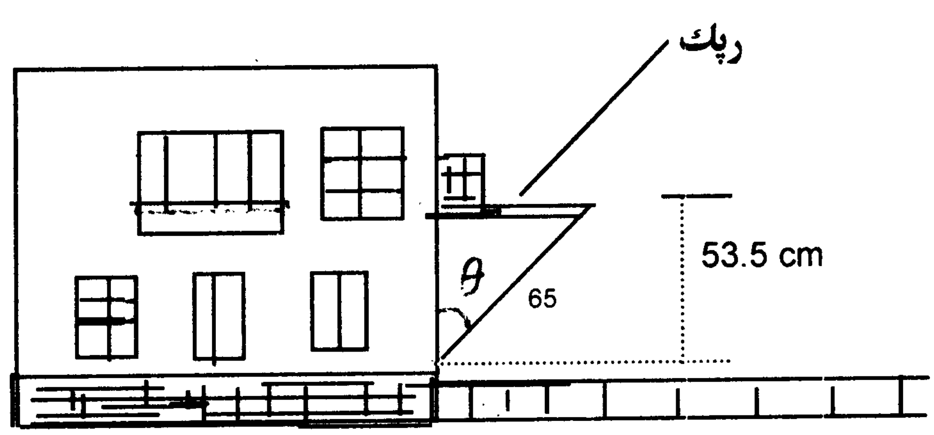
شکل ﴿۲٦ ــ ۱﴾

مثال سوم : یك تکیه گاه (ریك) برای نصب کردن ایر کاندیشنینگ (Window air condidtioning) در کلکین یك تعمیر ساخته میشود ۰ شکل (۲۷ ــ ۱)- طول چوب که در زیر ریك نصب میگردد (65 cm) است ۰ زاویه بین چوب و دیوار را دریافت کنید ؟

$\cos\theta = \frac{53.5}{65.0} = 0.8231$

$\theta = 34.6^{\circ}$

جواب



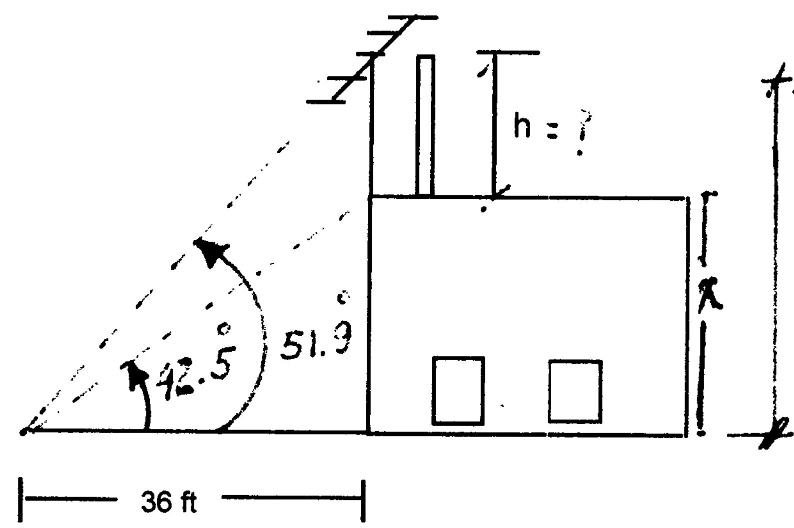
شکل ﴿۲۷ ــ ۱﴾

مثال چارم : آنتن یك تیلیویزیون بالای یك بام موقعیت دارد. از یك نقطهٔ به فاصلهٔ (36 ft) دورتر از تعمیر زاویهٔ ایلیویشن بالا و پائین آنتن با الترتیب ، 51.9° , 42.5° اند. ارتفاع آنتن موصوف را دریافت کنید. شکل (۲۸ــ ۱)

حل : $(\tan 42.5^\circ = X / 36)$ ، $X = (36)(\tan 42.5^\circ) = (36)(0.9163) = 33\ ft$

$(\tan 51.0^\circ = Y / 36.0$ ، $Y = (36)(\tan 51.0^\circ) = (36)(1.2349) = 44.5\ ft$

لهذا ...... $(h = Y - X = 44.5 - 33.0 = 11.5\ ft)$



شکل (۲۸ــ ۱)

سوالات عبارتی

۱ــ یك آنتن تیلیویزیون عموداً بالای سطح هموار سایه افگنده ، که طول این سایه (346 ft) است . از نقطهٔ آنجام این سایه زاویهٔ ایلویشن (Angle of elevation) با قلهٔ آنتن (48°) درجه میباشد ، ارتفاع این آنتن را دریافت نما ئید ؟

۲ــ یك ریسمان از سر یك پایهٔ عمودی به فاصلهٔ (10.5 m.) میتر، دورتر از قاعدهٔ پایه به میخ قایم شده است . اگر ریسمان با پایهٔ مذکور زاویهٔ (28°) درجه بسازد ، ارتفاع پایه را دریافت کنید ؟

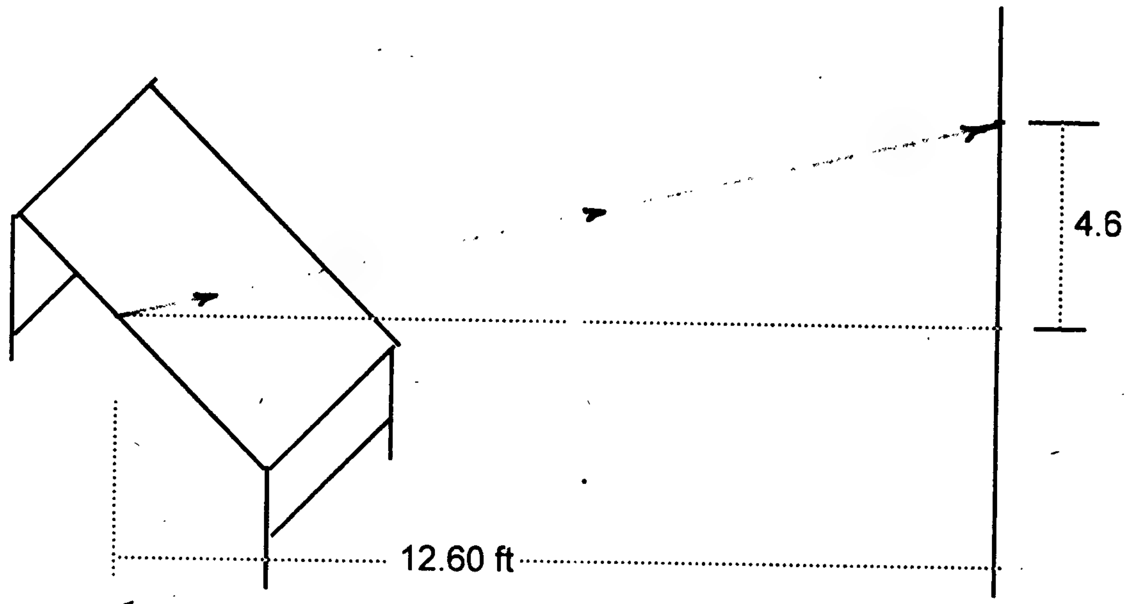
۳ــ یك رامپهٔ بارگیری (Loading Platform) از سطح زمین (3.25 ft) ارتفاع دارد . یك سطح مایل که زاویهٔ (20°) درجه را با سطح زمین میسازد به این رامپه ساخته میشود . طول این سطح مایل را معلوم کنید ؟

٤ــ یك زینه که طول آن (20 ft) است ، به کنار بام خانه گذاشته میشود . زاویه بین زینه و سطح زمین (70°) درجه است . قاعدهٔ زینه از دیوار خانه چقدر فاصله دارد ؟

۵ــ چراغ های پیشروی یك موتر طوری اعیار شده است که شعاع آن در جلو موتر به هر فاصلهٔ (25 ft) به اندازهٔ (2 inches) (۲ اینچ) پائین می افتد . زاویه بین شعاع چراغ وسرك چند درجه است ؟

٦ــ یك مرمی طوری فایر گردیده است که از کنار میز مماس گذشته ، در دیوار مقابل به فاصلهٔ (12.6 ft) فت از نقطه تماس با میز ، به ارتفاع (4.63 ft) بلندرتر از سر میز در دیوار مقابل داخل شده است . دریافت کنید که مرمی ازسطح افقی به چند درجه زاویه فیر گردیده است ؟ شکل (۲۹ ــ ۱)

۷ــ از فراز یك برج که ارتفاع آن (112.5 m) میتر است ، زاویهٔ دیفریشن (Angle of Depression) به سوی کیشتی در داخل آب (23.35°) درجه است ، معلوم کنید که کیشتی موصوف از قاعدهٔ برج چقدر دورتر است ؟



شکل (۲۹ـــ۱)

۸ــــ یك ماشین خود کار الیکترونیکی توسط یك کیهان نورد بالای سطح مهتاب طوری جابجا گردیده است که ، زاویهٔ دیپریشن (Angle of depression) کمرهٔ ماشین نظر به یك سنگ مهتاب (13.33°) درجه میباشد ۰ بلندی ماشین و کمره از سطح سنگ (.196 cm) بلند تر است ۰ شما دریافت نما ئید که کمرهٔ موصوف از سنگ چقدر دورتر واقع است ؟

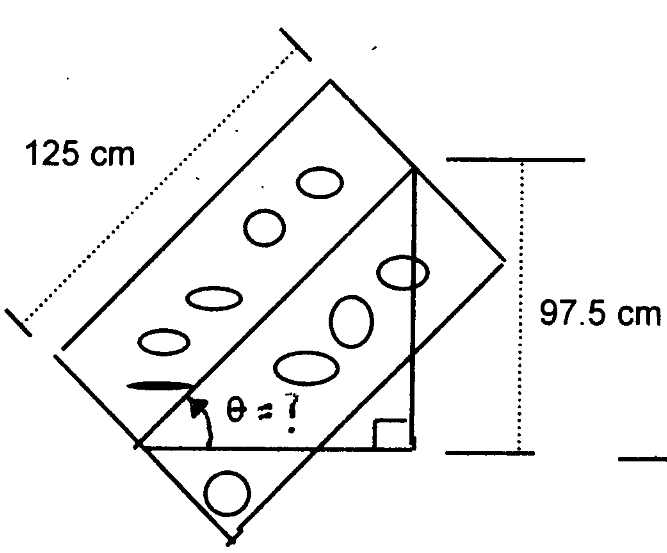
۹ــــ ریك خانه (راه رو دروازه) به اندازهٔ (2.65 ft) فت از زمین بلندرتر است ۰ جهت استفادهٔ معیو بین یك سطح مایل به این دروازه ساخته میشود که با سطح زمین زاویهٔ (6.0°) میسازد ، طول این سطح مایل را دریافت کنید ؟

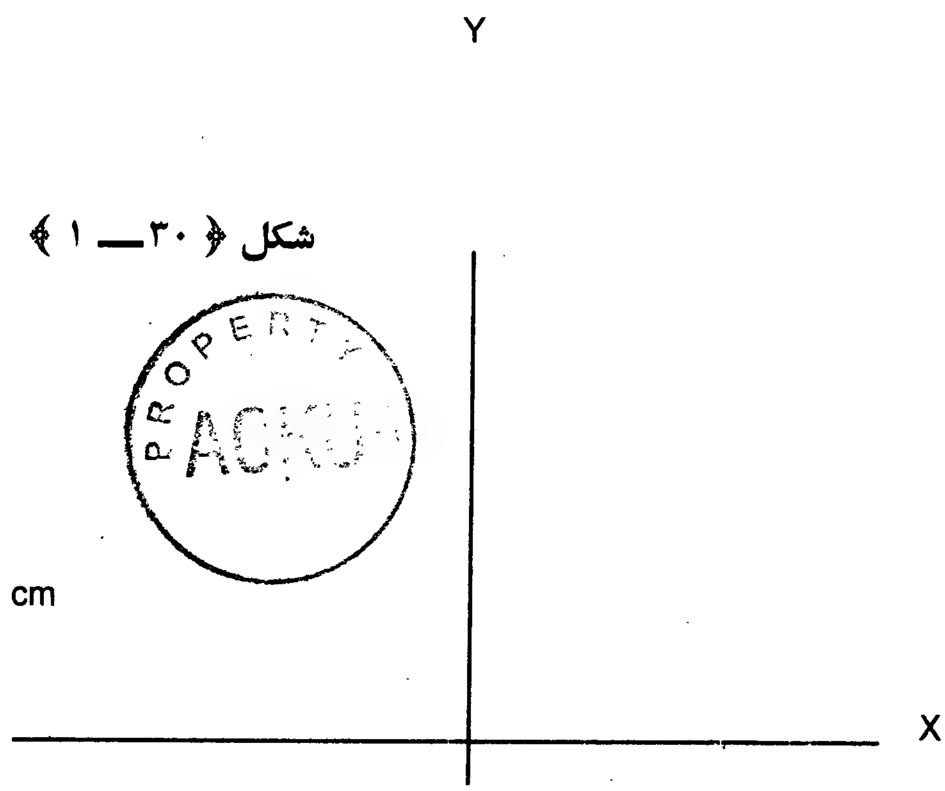
۱۰ ــــ هنگامیکه یك سفینه هوأی بالای خط دویش (Run Way) میدان هوائ پأین میگردد ، ارتفاع سفینه از انجام خط به ارتفاع (325 ft) مبباشد ۰ بعدأ این سفینه به زاویهٔ (7.5°) درجه همرای (Run Way) از آخر خط هوای نشست میکند ۰ تایر های این سفینه به کدام فاصله از آخر (Run Way) به زمین تماس (touch) کرده است ؟

۱۱ ــــ در روی یك نقشهٔ تعمیر ، دیوار های یك ا تا ق مستطیل ـ شکل ، دارای ابعاد ذیل اند : (6.25 cm X 3.85 cm) ۰ زاویهٔ بین ضلع طویل و قطر مستطیل را دریافت کنید ؟

۱۲ ــــیك دستگاه انرژی شمسی (آفتا ب) که طول آن (.125 cm) است توسط یك راد (میلهٔ آهن) قات شده که طول عمودی ضلع بزرگتر آن (7.5 cm) بوده ، بالای بام قایم شده است ۰ زاویه بین دستگاه و سطح افقی چقدر است ؟
شکل (۳۰ـــ۱)

شکل (۳۰ـــ۱)



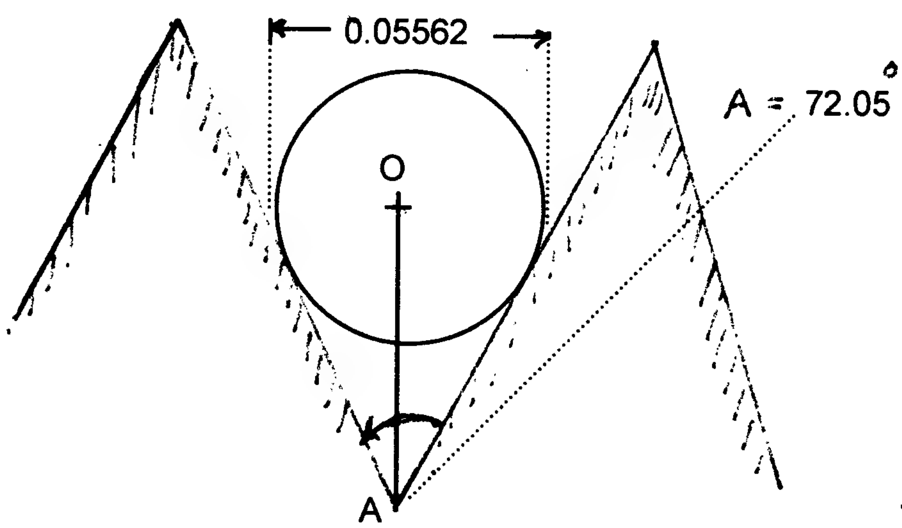


۱۳ ــــ یك فوارهٔ آب به سرعت (.590 mile / hr) و به زاویهٔ ($15^\circ 30'$) همرای زمین جریان دارد ، ارتفاع فواره ، بعد از مدت ۲ دقیقه چقدر خوا هد بود ؟

۱٤ ــــ به تعداد ده عدد ریپیت (rivets) بالای محیط یك توته آ هن شکل ـ دأیروی به فوا صل مساوی کوبیده شده است ۰ اگر فاصلهٔ از مرکز یك ریپیت به مرکز ریپیت همجوار (.6.25 cm) باشد ، درین صورت شعاع دأیره چند خوا هد بود ؟

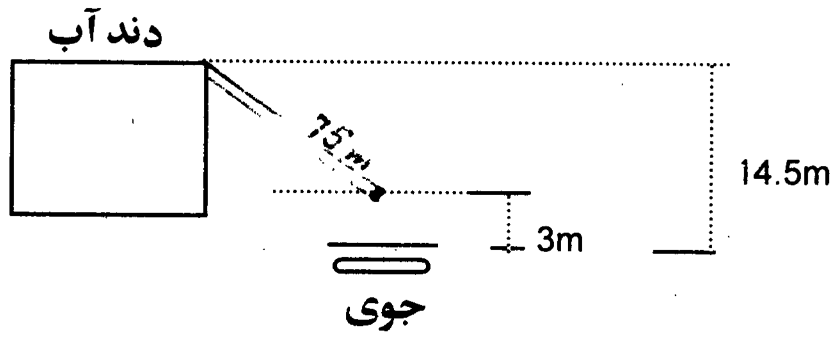
۱۵ ــ بالای یك برج دأیروی نظارت میدان هوأی کابل، یك کتاره فلزی جهت امور محافظوی گرداگرد برج اعمار میگردد، قطر این ساحهٔ دایروی نظارت مساوی است به (12.3 m.) ۰ اگر این کتارهٔ فلزی از (30) توته های مساوی پایپ ـ آهن مستقیم ساختهٔ شود، طول هر خادهٔ پایپ ـ آهنی را دریافت کنید؟

۱٦ ــ جهت اندازه کردن چوری یك پیچ یك توته سیم که قطر آن (0.05562 inches) بوده وزاویهٔ دندانه (A) مساوی به (72.05) درجه باشد، شما فاصلهٔ (O A) را دریافت کنید؟ --- شکل (۳۱ ــ ۱)

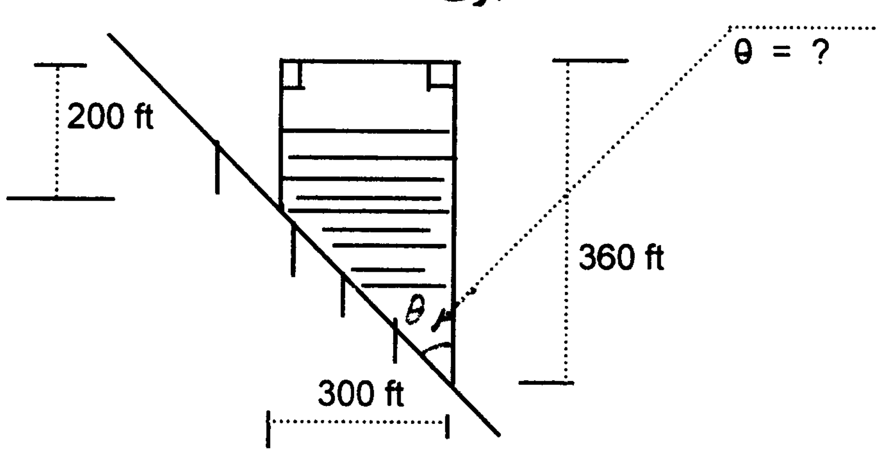


شکل (۳۱ ــ ۱)

۱۷ ــ سطح آب یك دند (Pond) از سطح آب جوی همجوار آن به اندازهٔ (14. 5 m.) بلندتر است ۰ یك نل بدرفت که طول آن (75 m.) است، از سطح آب دند به جوی همجوار مستقیماً طوری کش میشود که از سطح آب جوی به اندازهٔ (3 m.) بلندتر میباشد ۰ دریافت نمأید که نل موصوف همرای سطح افقی چند درجه زاویه میسازد؟ شکل ذیل ----



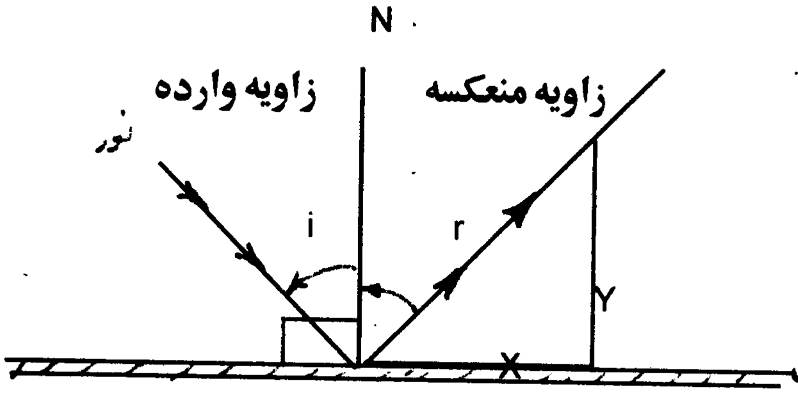
۱۸ ــ در شکل ذیل زاویهٔ (θ) را دریافت کنید؟



۱۹ ــ یك کیهان نورد به ارتفاع (100 mi notes) میل از سطح مهتاب به اطراف مهتاب دور میخورد ۰ در همین اثنا او مشاهده میکند که زاویهٔ دیپریشن (Angle of Depression) از قمر مصنوعی با افق نظر (Horizen) مهتاب مساوی به (23.8 0) درجه است ۰ از مشاهدات و معلومات این کیهان نورد شعاع مهتاب را دریافت نمأید؟

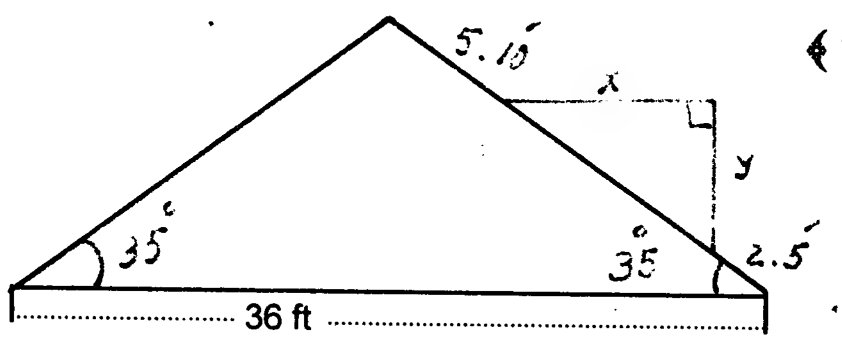
۲۰ ــ یك سرویر میخواهد که عرض یك دریا را بداند ۰ او از یك نقطهٔ (C) واقع یك طرف دریا به نقطهٔ (B) در دیگر طرف (مقابل) دریا نظر میکند ۰ و بعداً فاصلهٔ بین نقطه (C) و نقطهٔ (A) در همان طرف اولی دریا را طوری اندازه میکند که زاویهٔ (C) یك زاویه قایم میشود ۰ اگر فاصلهٔ بین نقاط (C) و (A) مساوی به (412.5 ft) اندازه کند و زاویهٔ (A) را (56.67°) درجه بخواند، شما عرض دریا را دریافت نمأید؟

۲۱ ــ هر گاه یك شعاع نور بالای یك سطح منعکسه مکدر می تابد ، نور مکمل منعکس میشود . شکل (۳۱ ــ ۱)
در صورتکه نور مکمل منعکس شود ، زاویهٔ وارده (i) مساوی میشود به زاویهٔ منعکسه (r) . در شکل ذیل ، اگر زاویهٔ وارده
($i = 42.15^{\circ}$) درجه باشد ، قیمت (X = 7.421 cm.) شود ، شما قیمت (Y) را دریافت کنید ؟



شکل ﴿ ۳۱ ــ ۱ ﴾

۲۲ ــ در شکل ذیل قیمت های (X) و (Y) را دریافت کنید ؟ ..... شکل (۳۲ ــ ۱)

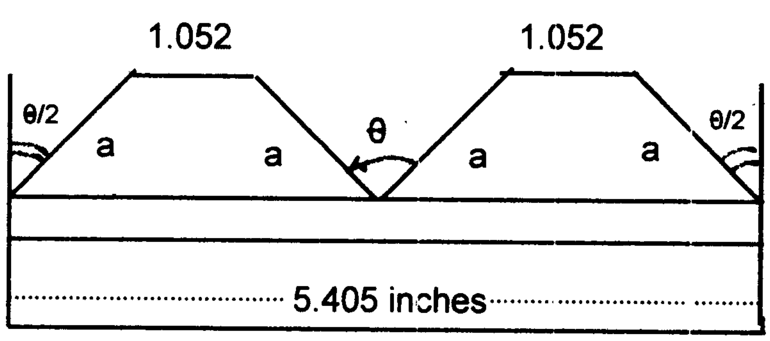


شکل ﴿ ۳۲ ــ ۱ ﴾

۲۳ ــ در شکل ذیل یك پرزهٔ ماشین نشان داده شده است . زاویهٔ (θ) را دریافت کنید ؟

a = 1.052

0 = ?

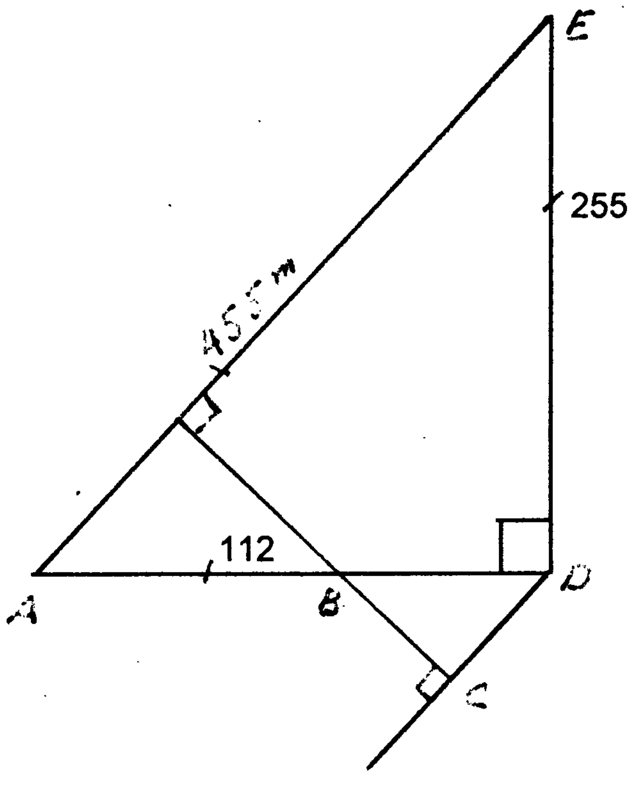


۲٤ ــ در سرکت برقی متناوب (AC) ، جهت محاسبه کردن امپیدینس (Impedence , Z) یك مثلث قایم الزاویه که وتر آن (Z) است ، در نظر گرفته میشود . یك ضلع مجاور زاویهٔ (θ) را مقاومت (Resistance) سرکت میگویند و زاویهٔ (θ) عبارت از زاویهٔ فاز (Phase Angle) بین ولتاژ و جریان سرکت میشود . حال اگر زاویهٔ فاز (Phase Angle) یك سرکت متنا وب ($\theta = 24.55^{\circ}$) درجه و مقامت (R = 25.4) اوم قیمت داشته باشد ، شما (Impedence) یا (Z) این سرکت را محاسبه کنید ؟

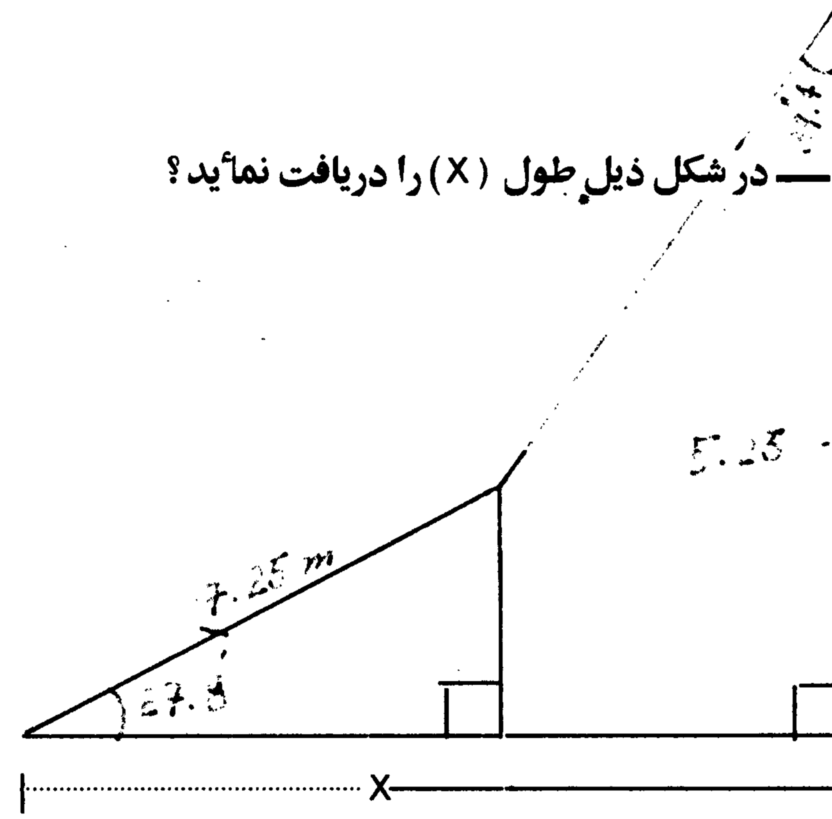
۲۵ ــ یك سرویر توسط (ترانزیت) دو نقطه را مستقیماً در پیشروی خود که هردو آن به اندازهٔ (18.525) میتر پأینتر ازجای مشا هده موقیعت دارند ، نشانی میکند . اگر زاویهٔ دیپریشن (Angle of Deprission) هر کدام نقطه ، باالترتیب :
(13.5° , 21.37°) درجه باشند شما دریافت کنید که این دو نقطه از همدیگر چقدر دورتر واقع اند ؟

۲٦ ــ یك عدد خادهٔ بیرق بالای بام یك تعمیر نصب گردیده است . پأین از تعمیر ، درسطح زمین به فاصلهٔ (720 ft) دورتر از تعمیر یك نفر سرویر زاویهٔ ایلیویشن(Angle of Elevation) بالا و پأین این خاده را باالترتیب (31.2° , 33.5°) درجه میخواند. ارتفاع خادهٔ بیرق را دریافت نمأید ؟

۲۷ــ در شکل ذیل فاصلهٔ (BD) را دریافت کنید ؟



۲۸ــ در شکل ذیل طول (X) را دریافت نمأید ؟



سوالات فصل اول

تمرین اول : از تمرین (۱ الی ٤) ، خوردترین زاویهٔ مثبت وخوردترین زاویه منفی را که با زاویه های ذیل کو ترمینل (Coterminal) باشند ، دریافت کنید ؟ (-7.6° , -217.5° , 248.3° , 17.0°)

تمرین دوم : از تمرین (۵ الی ۸) زاویه های ارأیه شده را به سیستم اعشاری تبدیل کنید ؟

5. $+31^\circ 54'$ 6. $+174^\circ 45'$ 7. $+38^\circ 6'$ 8. $+321^\circ 27'$

تمرین سوم : از تمرین (۹ الی ۱۲) ، زاویهٔ های ارأیه شده را به دقیقه تبدیل کنید ؟

9. 17.5° 10. 65.4° 11. 49.7° 12. 126.25°

تمرین چارم : توابع مثلثاتی زاویهٔ های را دریافت نمأید که ضلع دوم آنها از نقاط ذیل عبور کند ؟

13. (24 , 7) 14. (5 , 4) 15. (4 , 4) 16. (1.2 , 0.5)

تمرین پنجم : در تمرین های (۱۷ الی ۲۵) ، بعضی توابع مثلثاتی داده شده است ، توابع دیگر آنها را دریافت کنید ؟

17. $\sin\theta = 5/13$, $\cos\theta = ?$ & $\cot\theta = ?$ 18. $\cos\theta = 3/8$, $\sin\theta = ?$ & $\tan\theta = ?$

19. $\tan\theta = 2$, $\cos\theta = ?$ & $\csc\theta = ?$ 20. $\cot\theta = 4$, $\sin\theta = ?$ & $\sec\theta = ?$

تمرین ششم : از تمرین (۲۱ الی ۲٤) ، قیمت های توابع مثلثاتی را توسط کلکو لیتر دریافت کنید ؟

21. $\sin 72.1^\circ$ 22. $\cos 40.3^\circ$ 23. $\tan 61.64^\circ$ 24. $\sin 49.09^\circ$

تمرین هفتم : با استفاده از کلکو لیتر ، زاویهٔ (θ) را معلوم نمأید ؟

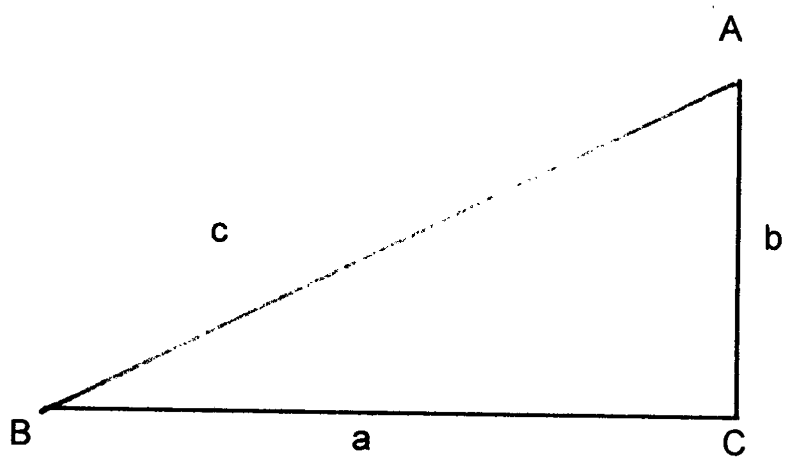
25. $\cos\theta = 0.950$ 26. $\sin\theta = 0.63052$ 27. $\tan\theta = 1.574$ 28. $\cos\theta = 0.1345$

تمرین هشتم : از تمرین (۲۹ الی ۳۲) ، قیمت توابع مثلثاتی را ازجدول کتاب معلوم نمأید ؟

29. $\tan 59^\circ 20'$ 30. $\sin 82^\circ 40'$ 31. $\cos 55^\circ 30'$ 32. $\tan 23^\circ 50'$

تمرین نهم : از تمرین (۳۳ الی ۳٦) ، زاویهٔ (θ) را از روی جدول دریافت کنید ؟

33. $\sin\theta = 0.5323$ 34. $\tan\theta = 1.264$ 35. $\cos\theta = 0.4669$ 36. $\sin\theta = 0.1048$



شکل «۳۳ــــ ۱»

تمرین دهم : از تمرین (۳۷ الی ۴۸) ،مثلث های قایم الزاویهٔ مطلوب را حل کنید ؟

37.	$A = 17.0^\circ$, $b = 600$	38.	$B = 68.1^\circ$, $a = 1080$	39.	$a = 81$, $b = 64.5$
40.	$a = 1.06$, $c = 3.82$	41.	$A = 37.5^\circ$, $a = 12$	42.	$B = 15.7^\circ$, $c = 12.6$
43.	$b = 6.508$, $c = 7.642$	44.	$a = 72.14$, $b = 14.37$	45.	$A = 49.678^\circ$, $c = 0.8253$
46.	$B = 4.375^\circ$, $b = 5.682$	47.	$a = 11.652$, $c = 15.483$,	48.	$a = 724$, $b = 852.44$

سوالات عبارتی :

۴۹ــــ در تحلیل قوه ها بالای یك (چپراست دروازه) ، یکی از قوه ها ی عمودی (F_y) است که از معادلهٔ ($F_y = F\cos\theta$) محاسبه میشود ۰ اگر قوهٔ (F) مساوی به (56) نیو تن و زاویهٔ ($\theta = 37.5^\circ$)درجه باشد ۰ قوهٔ عمودی (F_y) را دریافت کنید ؟

۵۰ــــ یك جسم بالای یك سطح مستوی ما یل به فا صلهٔ (S) واحد می لخشد ۰معادلهٔ سرعت برای این سرعت عبارت است از : ($v = \sqrt{2gS\sin\theta}$)، که درین فورمول (g) تعجیل جاذبهٔ زمین ، (θ) زاویهٔ مستوی مایل با سطح زمین است ۰ شما قیمت (v) را دریافت کنید ؟ در صورتیکه ($\theta = 52.2^\circ$, $S = 35.5$ ft , $g = 32.2$ ft / sec^2) باشند ۰

۵۱ــــ معادلهٔ تقریبی انکسار نور از یك سورا خ باریك عبارت است از ($\sin\theta = \lambda / d$) که درین معادله (λ) طول موج نور و(d) عبارت ازعرض سورا خ میباشد ۰ اگر ، ($d = 30.05\,\mu m$, $\theta = 1.167^\circ$) باشد ، پس درین معادله طول موج (λ) را دریافت کنید ؟ (λ) حرف یونانی است که به نام لمدا تلفظ میشود ۰

۵۲ــــ معادلهٔ که جهت دریافت جریان لحظوی در برق بکار میرود ، عبارت است از ($i = Im\cos\theta$) ۰ قیمت (i) را دریافت کنید در صورتیکه ، ($\theta = 10.55^\circ$, $Im = 56$ ma.) ۰ قیمت جریان به میلی امپیر داده شده است ۰

۵۳ــــ برای دریافت ارتفاع یك تعمیر ، یك سر ویر به فاصلهٔ (220 m) از تعمیر دورتر است ۰ وی از معادلهٔ ($h = 220\tan\theta$) استفاده میکند که زاویهٔ (θ) زاویهٔ ایلیویشن به بام و (h) ارتفاع تعمیر است ۰ اگر ؛ ($h = 130$ m.) باشد ، شما زاویهٔ (θ) را دریافت نما ئد ؟

۵۴ــــ فورمول که ازطریق آن میتوانیم قطر یك گراری محاسبه کرد، عبارت است از ؛ ($D = \frac{1}{4}N\sec\theta$) ۰ اگر ($N = 20$, $D = 6.75$ inches) ۰ درین معا دله ، (D) قطر گراری و(N) تعداد دندانهٔ گراری و زاویه(θ) بنام (spiral) بوده دریافت کنید؟

۵۵ــــ کیفتان یك کیشتی میخواهد که بطرف جنوب در بحر الکاهل حرکت کند ، بعد از یك دقیقه دریافت مینما ید که نظر به خرابی هوا و غیر فعال شدن آلات مخابراتی ، آن کیشتی در عوض بطرف جنوب شرق به زاویهٔ ($\theta = 4.050^\circ$) درجه به فاصلهٔ ($d = 22.62$ miles) سهواً سفر کرده است ـ شما دریافت کنید که این کیشتی از منزل گاه سفر خویش چقد ر دورتر رفته است ؟

٥٦ــــ پیلوت یك طیاره هلیکوپتر دریافت میکند که او به اندازهٔ (150 m) از بام یك تعمیر ارتفاع دارد. اگر زاویهٔ دیپریشن (angle of Depression) وی تا به سر بام تعمیر مذکور (18.0°) درجه باشد، ارتفاع طیاره از بام چقدر است ؟

٥٧ــــ در وقت فایر شدن یك قمر مصنوعی ، یك نفر تماشا چی که به فاصلهٔ (3500 ft) از تختهٔ فایر قمر مصنوعی دورتر موقیعت دارد، زاویهٔ ایلیویشن (Angle of elevation)را با قمر مصنوعی در هوا (54°) درجه میخواند. شما دریافت کنید که قمر موصوف چقدر ارتفاع گرفته است ؟ (قمر موصوف عموداً بطرف بالا فایر گردیده است) .

٥٨ــــ تار یك کاغذ پران در هوا (560 ft) است . اگر زاویهٔ ایلیویشن (Angle of elevation) یك نفر بیننده با کاغذ پران (64) درجه باشد ، ارتفاع کاغذ پران را دریافت کنید ؟ (تار کا غذ پران مستقیم است)

٥٩ــــ یك سرك عمومی در طول (2200 ft) امتداد به اندازهٔ (120 ft) بلند شده میرود ، زاویهٔ اینکلینیشن (Angle of Inclination)سرك موصوف را دریافت کنید ؟

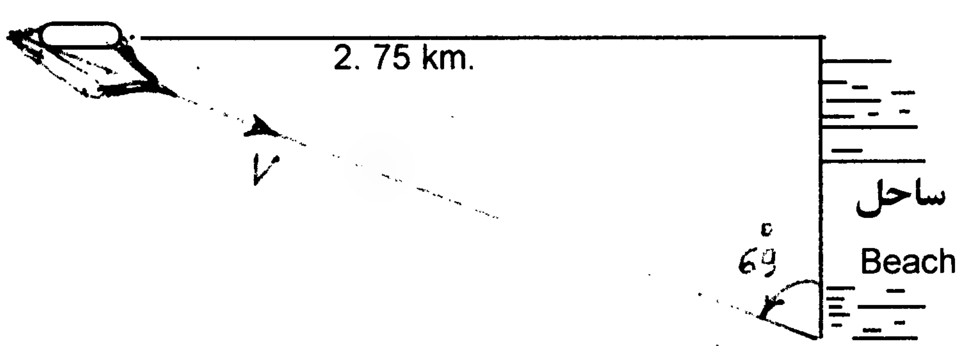
٦٠ــــ یك کاسه به شکل نیم کرهٔ که به حالت افقی گذاشته شده . شعاع داخلی این کره (6.5 inches) است از آب تا به عمق (3.10 inches) پر شده است ، به کدام زاویه میبا ید کج شود قبل ازاینکه آب از کاسه بیریزد ؟

٦١ــــ جهت ساختن یك سرك ریل ، پشتوانه ریگی (embankment) به ارتفاع (7.10 ft) از مزرعهٔ یك زمین بلندر تر ساخته میشود . عرض فوقانی این پشتوانه (22.0 ft) است . میلان پشتوانه به هر دو طرف مساوی بوده که عبارت است از (14.5 ft) . شما عرض تحتانی این پشتوانه را دریافت کنید ؟

٦٢ــــ هنگامیکه یك رقاصه (perdulum) تال میخورد ، فاصلهٔ افقی اعظمی این رقاصه به (9.50 cm) میرسد . اگر طول تار این رقاصه (38.0 cm) بوده باشد ، شما معلوم کنید که رقاصهٔ موصوف به چند درجه زاویه تال خورده است ؟

٦٣ــــ یك پایپ گاز طبعی که طول آن (3.25 km.) بوده بالای زمین طوری نصب گردیده است که یك انجام آن به زاویه (3.25°) درجه بلند تر میباشد . شما دریافت نمأید که یك انجام پایپ از انجام دیگر آن چقدر بلند تر نصب گردیده است ؟

٦٤ــــ یك کیشتی از ساحل بحر به فاصلهٔ (2.75 km.) دورتر به سرعت (37.5 km / hr.) به یك مسیر که زاویهٔ (69.0°) درجه را با ساحل میسازد بطرف ساحل می آید . کشتی موصوف بعد ازچقدر وقت به ساحل بحر مواصلت خواهد کرد ؟ (شکل ٣٤ــــ ١).



شکل (٣٤ــــ ١)

٦٥ــــ فراخی یك بام (2.25 ft) میباشد ، بلندی بام در حصهٔ وسط (7.5 ft) است . بام موصوف همرای افق چند درجه زاویه میسازد ؟

٦٦ــــ مقاوم (Impedance, Z) در یك سرکت متناوب ($Z = 56.50\ \Omega$) و مقا ومت خا لص آن ($R = 17.45\ \Omega$) میشود . زاویهٔ فا ز (θ) این سرکت را معلوم کنید ؟ (مقاوم وتر مثلث و مقاومت یکی از اضلاع قایم مثلث اند) . R ضلع مجاور θ

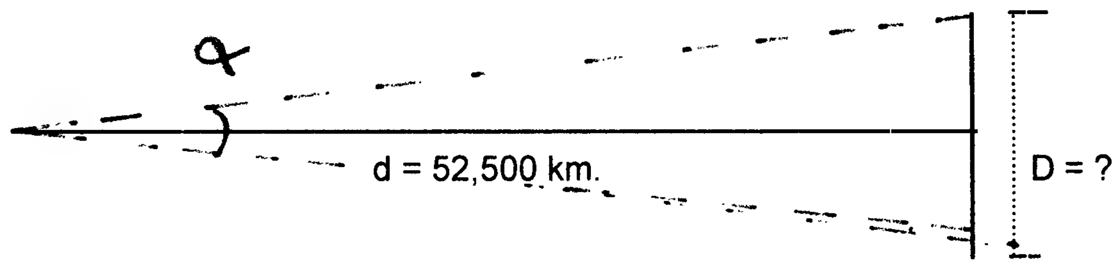
٦٧ــــ یك پل نظر به چار اطراف خود به اندازهٔ (12.5 m) بلند تر است . اگر زاویهٔ ایلیویشن آن از یك نقطه زمین به پل (4.625°)درجه باشد ، تقرب این نقطه به پل چقدر است ؟

٦٨ــــ شیشهٔ پیشروی یك موتر به زاویهٔ (42.5°) همرای سطح افقی نصب گردیده است . فرض کنید که شیشهٔ موصوف هموار بوده و به شکل مستطیل میباشد ، مساحت این شیشه را در صورت دریافت کنید که اگر شیشه موصوف به اندازهٔ (4.80 ft) فراخ (طول) بوده و حصهٔ پاینتر آن از حصهٔ بالا (1.5 ft) فاصله داشته باشد ،

۶۹ــــ یك نفر در تعمیر بلند منزل در مقابل کلکین خود سقوط جسم را به فاصلهٔ (20 ft) دورتر مشاهده میکند۰ اگر فاصله این سقوط تابع وقت بوده ، و به این فورمول ارایه شود که ($s = 16t^2$) ۰ جسم به مسیر مستقیم بعد از دو ثا نیه از نفر مذکور چقدر دورتر خواهد بود ؟

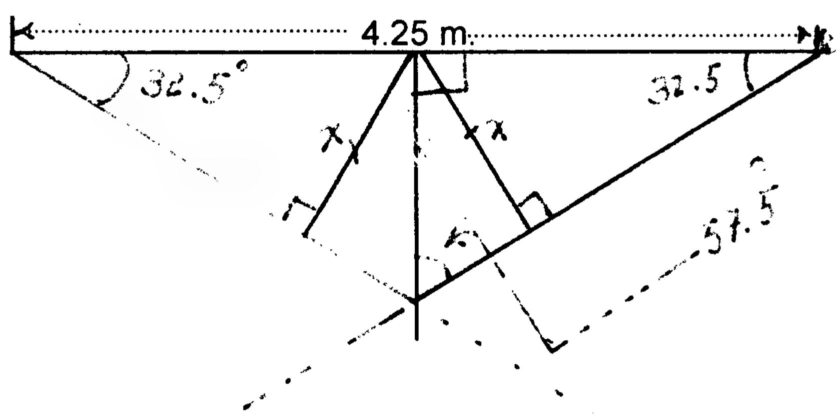
۷۰ــــ فاصله ازسطح زمین تا به نقطهٔ زیرین ابر را به نام چت (cieling) یاد میکند۰ چراغ یك رآدآر عموداً بطرف ابر پرتاب شده است ۰ یك نفر تما شا چی که به فاصلهٔ (1200) میتر از رآ دآر دورتر است روشنئ رآ دآر را در ابر به زاویهٔ ایلیویشن (76°) درجه می بیند۰ ابر از زمین چقدر بلندر تر است ؟

۷۱ــــ شعاع ماشین لیزر از یك نقطه به فراخی (0.002) درجه پرتا ب گردیده است ۰قطر (D) شعاع لیزر موصوف را در فاصله (d = 52,500 km) دور تر دریافت کنید ؟ (شکل ذیل ----)



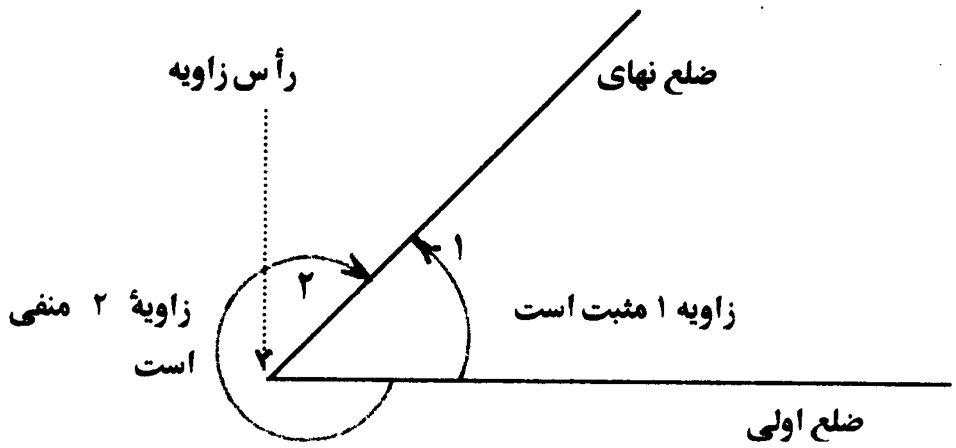
۷۲ــــ یك طیاره به طول(155 ft)در هوا در پرواز بوده که یك بیننده آن را از فاصلهٔ (5.0 mile) طوری مشا هده میکند که هر دو انجام طیاره را نظاره میکند۰ زاویهٔ چشم بیننده منطبق به دو انجام طیاره را دریافت کنید ؟

۷۳ــــ یك بالون هوآی با لای ساحل یك خلیج خورد در هوا شنأ میکند ۰ یك نفر مشاهده کننده به مسیر خط مستقیم به فاصله (375 m) دورتر بالون را مشاهده میکند۰ اگر از نقطهٔ که مشاهده کننده نظر دارد ، زاویهٔ ایلیویشن با بالون (42°) درجه و زاویهٔ دیپریشن نظاره با ساحل خلیج($25'$) درجه باشد ۰ بالون موصوف به کدام فاصله بالای ساحل استاده است ؟



۷٤ــ در شکل ذیل طول (X) را دریافت کنید ؟

نقطهٔ ثابت نیم خط را بنام رأس (Vertex) زاویه یاد میکنند۰ خود زاویه مقدار حرکت دورانی است که نیم خط از حالت اولی تا به حالت نهای طی میکند۰اگر سمت حرکت دورا ن نیم خط از حالت اولی خود ، مخالف جهت حرکت عقرب ساعت باشد، این زاویه را به عنوان زاویه ٔمثبتً یاد میکنند۰ و اگر حرکت دورانی آن هم جهت عقرب ساعت باشد آن زاویه را ٔمنفیً میگویند، (شکل ذیل را ملا حظه نمأید)۰ در شکل (۲ــ۱)، زاویهٔ (۱) مثبت و زاویهٔ (۲) منفی میباشند۰



شکل ﴿۲ ــ ۱﴾

زاویه ها به علا مات (سیمبول هایی) مختلف نشان داده میشوند ، اما مشهور ترین آنها حروف الفبا ی یونانی تیتا (θ) ، الفا (α)، بیتا (β) و غیره میباشند۰اکثرأ زاویه به حروف کلا ن لا تین نیز نشان داده میشود ما نند : $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$,

واحدات اندازه گیری زاویه :

زاویه عموماً به سه واحد ـ درجه (degree) ، رادین (Radian) وگراد (Grad) اندازه گیری میشود۰ ما فعلاً در ین جاه از واحدات ، درجه و رادین استفاده میکنیم۰ اما باید در نظر داشته باشیم که از جمله ، دو واحد اول زیا دتر در کلکو لیتر ها وکمپیو تر ها استعمال میشو ند ـ لهذأ لازم است تا رابطه های بین این دو واحد زاویه را بد انیم :

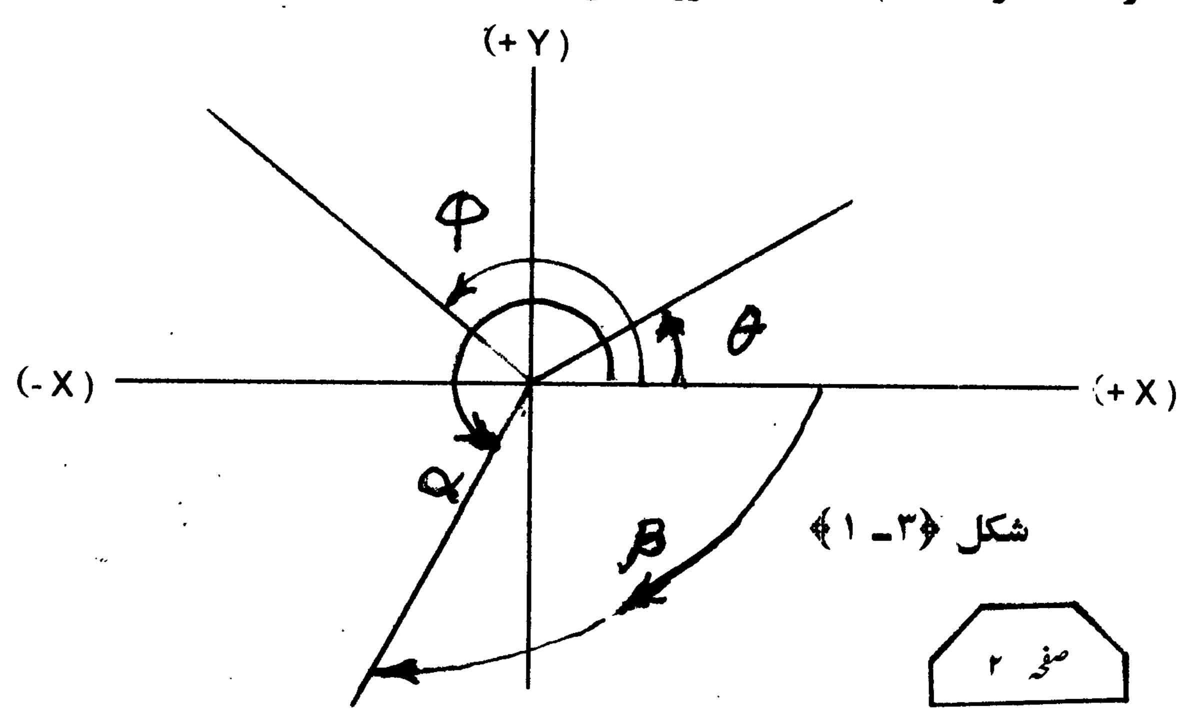
(۱) ـ درجه، عبارت از (1/360) حصهٔ یك دور مکمل به اطراف یك نقطه است۰ اگر ما زاویهٔ مرکزی یك دایره را به(360) حصهٔ مساوی تقسیم نمایم ۰ درین صورت اند ازهٔ هر حصه آن عبارت از یك درجه است ودرجه با علا مهٔ (°) نشان داده میشود۰

مثال : زاویهٔ های، ($\theta = 30^\circ$, $\phi = 140^\circ$, $\alpha = 240^\circ$, $\beta = -120^\circ$)

در شکل (۳ــ۱) زاویه های(θ , ϕ , α , β) نشان داده شده اند۰

(۲) رادین، اگر ما رأ س آن زاویهٔ را در مرکز یك دأ یره قرار بدیهیم که طول قوس احاطه شده تو سط این زاویه مساوی به طول شعأ ع این دأ یر ه شود ، میگو یم که اندازهٔ این زاویه یك رادین (1--Radian) است ۰در شکل (٤ــ۱) زاویهٔ ها ی ۱ـ رادین ، ۲ـ رادین ، ۳ـ رادین و (2π radian)، با آلتر یب نشا ن دا ده شده اند۰

(۳) ـ گراد (Grad) ، عبارت : از (1/400) حصهٔ یك دور مکمل به اطراف یك نقطه است ۰



شکل ﴿۳ ـ ۱﴾

فصل دوم

توابع مثلثاتی هر زاویه

در دروس گذشته توابع مثلثاتی زاویهٔ حاده را مطالعه کردیم ۰ وقتیکه ، توابع مثلثاتی زاویهٔ حاده را بدانیم ، به اساس آن توابع مثلثاتی هر زاویه را پیدا کرده میتوانیم ۰

درین فصل ، برعلاوه آنکه زاویه های مشخص با واحد درجه را مورد بحث قرار میدیهیم ، زاویه های که با واحد رادین Radianارأیه میشوند نیز مطالعه مینمأیم ۰

۱ــــ علامات توابع مثلثاتی :

تعریفات توابع مثلثاتی را که در دروس گذشته مطالعه نمودیم ، اینك باری دیگر آنها را از نظر میگذرانیم ۰ ما درین بحث خویش ، یك زاویهٔ (θ) را در حالت ستندرد (standard) در ربع اول کواردینیت قرار میدیهیم ۰ بعداً یك نقطهٔ کیفی p (x , y) را بالای ضلع دوم زاویه که دارای شعاع ویکتوری (r) بوده ، در نظر میگیریم ۰ شکل (۳۵ــــ ۱)

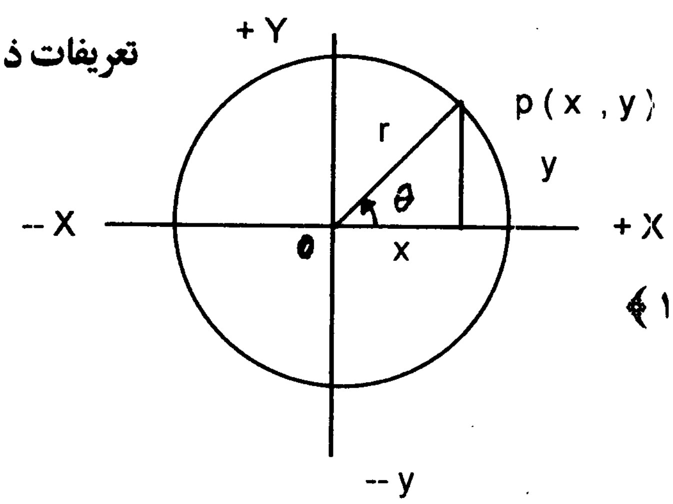
تعریفات ذیل را یاد آوری کرده میتوانیم :

$\sin\theta = y/r$ $\cos\theta = x/r$

$\tan\theta = y/x$

$\cot\theta = x/y$ $\sec\theta = r/x$

$\csc\theta = r/y$



شکل (۳۵ــــ ۱)

بخاطر داشته باشیم که وتر مثلث (r) همیش مثبت بوده ، وعلامهٔ هر زاویه مربوط به علامات (X , Y) میشود ۰

بطور مثال : هر گاه ضلع دوم یك زاویه در ربع اول ودوم موقیعت داشته باشد ، علامهٔ (sin θ) مثبت میشود ، زیرا علامهٔ (Y) در این دو ربع مثبت اند ۰ برخلاف ، اگر یك زاویه در ربع سوم وچارم موقیعت داشته باشد درین صورت علامهٔ (sin θ) منفی میباشد ، زیرا علامهٔ (Y) در این دو ربع منفی اند ۰ این واقیعت از آن خاطر صدق میکند که علامهٔ (Y) بالاتر ازمحور (X) مثبت ، و برخلاف علامهٔ (Y) پائینتر از محور (X) منفی میباشد ۰ شکل (۳۵ــ ۱) را مطالعه فرمأید ۰

مثال الف :

علامهٔ ($\sin 30^\circ$) مثبت است ، زیرا ضلع دوم این زاویه در ربع اول موقیعت میگرد که قیمت (Y) درین ربع مثبت است ۰ و همچنان علامهٔ ($\sin 170^\circ$) نیز مثبت است ، زیرا ضلع دوم این زاویه در ربع دوم واقع میشود که قیمت (Y) درین ربع نیز مثبت است ۰ اما در عوض ، علامات ($\sin 340^\circ$) و ($\sin 200^\circ$) هر دو منفی اند ، زیرا اضلاع دوم این دو زاویه باالترتیب : در ربع چارم وربع سوم موقیعت دارند، که قیمت های (Y) در هر دو ربع منفی میباشند ۰

علامهٔ (tan θ) ، چون از نسبت (Y) بر (X) تعین میگردد ، لذا علامه آن نیز مربوط است به علامات هر دو (Y) و (X) که در کدام ربع ها قرار میگیرند۰

در ربع اول که (X) و (Y) هر دو مثبت قیمت دارند ، لهذا علامهٔ (tan θ) مثبت میباشد ، و همچنان در ربع سوم که علامات(X) و (Y) منفی اند ، لذا علامهٔ (tan θ) نیز مثبت میشود ۰ مثال ذیل را درنظر بگیرید :

مثال (ب) : علامات (tan 30°) و (tan 200°) هردومثبت اند ، زیرا اضلاع دوم این دو زاویه: بالترتیب در ربع اول و سوم موقعیت میگیرند ۰ و بر خلاف ، علامات(tan 160°) و (tan 340°) هر دو منفی میشوند ، زیرا اضلاع دوم هر کدام بالترتیب : در ربع دوم و ربع چارم موقعیت دارند ۰

علامهٔ (cos θ) مر بوط است به علامهٔ (X) ۰ چون قیمت (X) در ربع اول و چارم مثبت اند ، لذا (cos θ) درین دو ربع نیز مثبت میشوند ۰ به همین ترتیب : (cos θ)در ربع دوم و سوم منفی میشوند ، زیرا قیمت های (X) در ربع دوم و سوم منفی اند ۰

مثال (ج) : علامات (cos 20°) و (cos 340°) هر دو مثبت میشوند ، زیرا این دوزاویه بالترتیب در ربع اول و چارم قرار میگیرند ۰ و بر عکس ، علامات(cos 160°) و (cos 200°) هر دو منفی میشوند ، زیرا هر دوزاویه بالترتیب در ربع دوم و سوم موقعیت میگیرند که قیمت (X) دراین دو ربع منفی میباشند ۰

چون تابع(csc θ) معکوس تابع (sin θ) است ، وعلامات هر دو به علامهٔ (y) ارتباط میگیرند ۰ لهذا :
علامات (csc θ) و (sin θ) با هم یکی اند ۰ همچنان تابع (cot θ) که معکوس تابع(tan θ)میباشد ، با هم دیگر علامات مشابه دارند ۰

به همین منوال ، تابع (sec θ) که معکوس تابع (cos θ) بوده ، دارای علامات مشابه میباشند ۰ یك طریقهٔ عملی جهت تشخیص علامت توابع مثلثاتی در ذیل خلاصه میگردد :

۱ـ تمام زاویهٔ هایکه در ربع اول واقع میشوند ، علامات آنها مثبت اند ۰

۲ـ علامات توابع(sin θ) و (csc θ) که زاویه های آن در ربع دوم واقع شوند ، مثبت میشوند ۰

۳ـ زاویه های که در ربع سوم واقع شوند ، علامات توابع (tan θ) و (cot θ) آنها نیز مثبت اند ۰

٤ـ زاویه های که در ربع چارم واقع شوند ، علامات توابع (cos θ) و (sec θ) آنها نیز مثبت اند ۰

به خاطر داشته باشید که تشخیص علامت فوق الذکر ، بالای آن عده زاویه های که اضلاع ربعی دارند که بنام زاویه های (Quadrantal Angles) نامیده میشوند ، دربر نمیگیرد ۰ زاویه های ربعی رادر دروس گذشته مطالعه نمودیم ۰ آن عده زاویه های که اضلاع دوم آنها بالای یکی از محور های (X) ویا (Y) واقع شوند بنام **زاویه های ربعی** یا (Quadrantal Angles) یاد میگردند ۰ مانند : زاویه های : (0° , 90° , 180° , 270° , 360° , 450° , 540° ..) ومانند آنها ـ ـ ـ
جدول ذیل در تشخیص علامات توابع مثلثاتی خلا صه گردیده است:

	ربع	توابع مثبت اند	
I	اول	تما ماً	صرف در ربع اول هیچکدام منفی نیست
II	دوم	sin , csc	توابع منفی اند: cos , sec, tan , cot
III	سوم	tan, cot	توابع منفی اند: sin , csc , cos , sec
IV	چارم	cos , sec	توابع منفی اند: sin , csc , tan , cot

مثا ل : علامات توابع مثلثاتی زاویه های ذیل تماماً مثبت میباشند :

cos 8° , cos 300° , cos (--40°) , tan 220° sin 50° , sin 150° , sin (-- 200°)

sec (--37°) , csc 140° , csc (--190°) tan (+37°) , cot 260° , cot (--310°) , sec 280°

مثال : علامات توابع مثلثاتی زاویه های ذیل تماماً منفی میباشند :

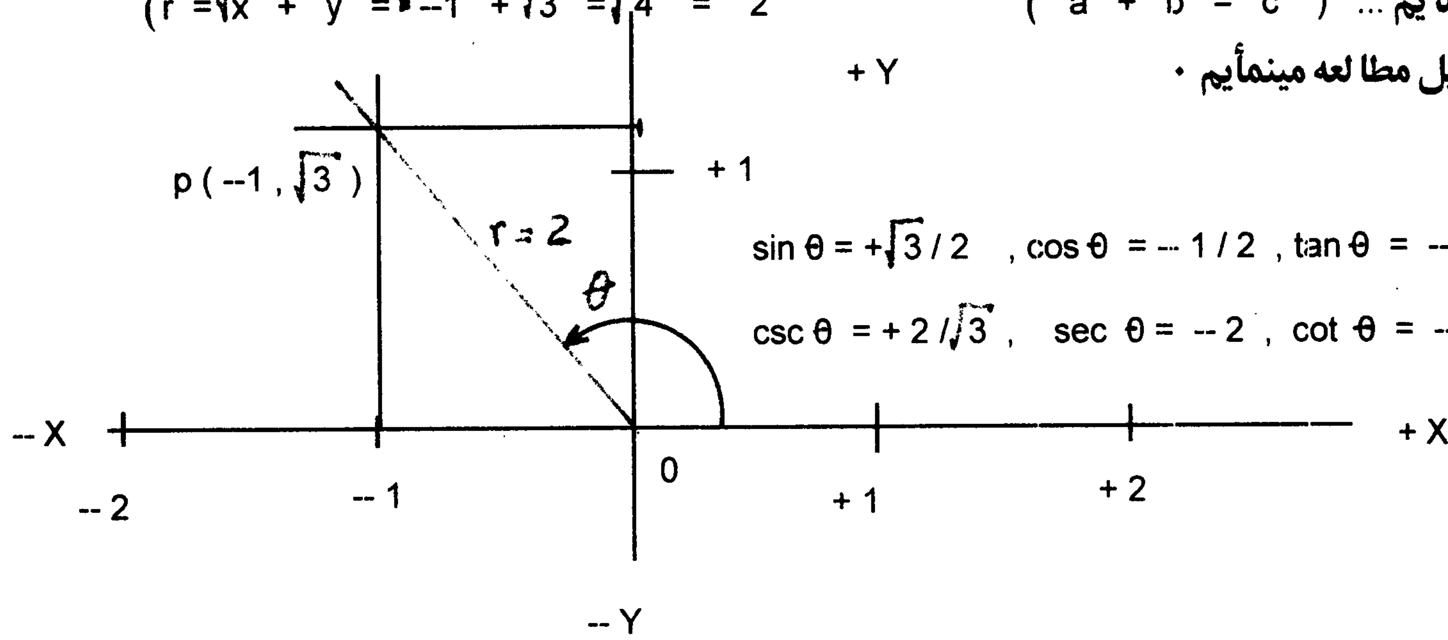
$\sin 190^\circ$, $\sin 325^\circ$, $\cos 100^\circ$, $\cos(-95^\circ)$, $\tan 172^\circ$, $\tan 295^\circ$, $\cot 105^\circ$

$\cot(-6^\circ)$, $\sec 135^\circ$, $\sec(-135^\circ)$, $\csc 240^\circ$, $\csc 355^\circ$,

مثال : توابع مثلثاتی زاویهٔ (θ) را که ضلع دوم آن از نقطهٔ $p(-1, \sqrt{3})$ عبور میکند ، دریافت کنید ؟

حل : درین مثال میدانیم که قیمت های $x = -1$, $y = \sqrt{3}$ لهذا مطابق قضیهٔ فیثاغورین میتوانیم قیمت r را دریافت نمأیم ... $(a^2 + b^2 = c^2)$ $(r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{-1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$

درشکل ذیل مطالعه مینمأیم ۰



$\sin\theta = +\sqrt{3}/2$, $\cos\theta = -1/2$, $\tan\theta = -\sqrt{3}$

$\csc\theta = +2/\sqrt{3}$, $\sec\theta = -2$, $\cot\theta = -1/\sqrt{3}$

تمرین (۲ ــ ۱)

۱ــ از تمرین (۱ الی ۸) علامات توابع مثلثاتی زاویهٔ های ذیل را تعین نمأید ؟

1. $\sin 60^\circ$, $\cos 120^\circ$, $\tan 320^\circ$
2. $\tan 185^\circ$, $\sec 115^\circ$, $\sin(-36^\circ)$
3. $\cos 300^\circ$, $\csc 97^\circ$, $\cot(-35^\circ)$
4. $\sin 100^\circ$, $\sec(-15^\circ)$, $\cos 188^\circ$
5. $\cot 186^\circ$, $\sec 280^\circ$, $\sin 470^\circ$,
6. $\tan(-91^\circ)$, $\csc 87^\circ$, $\cot 103^\circ$
7. $\cos 700^\circ$, $\tan(-560^\circ)$, $\csc 530^\circ$
8. $\sin 256^\circ$, $\tan 321^\circ$, $\cos(-370^\circ)$

۲ ــ توابع مثلثاتی زاویهٔ (θ) را دریافت کنید در صورت که ضلع دوم آن از نقا ط ذیل عبور میکند ؟

9. (2 , 1) 10. (--1 , 1) 11. (--2 , --3) 12. (4 , --3)

13. (--5 , 12) 14. (--3 , --4) 15. (5, --2) 16. (3 , 5)

۳ــ در تمرین (۱۷ الی ۲٤) آن ربع را مشخص نمأید که ضلع دوم زاویهٔ (θ) مطابق حالات توضیح شده صد ق کنند ؟ (زاویهٔ مأخذ θ , (Reference Angle) در کدام ربع واقع میشود ؟)

17.	sin θ	مثبت	cos θ	منفی	18.	tan θ	مثبت	cos θ	منفی
19.	sec θ	منفی	cot θ	منفی	20.	cos θ	مثبت	csc θ	منفی
21.	csc θ	منفی	tan θ	منفی	22.	sec θ	مثبت	csc θ	مثبت
23.	sin θ	منفی	tan θ	مثبت	24.	cot θ	منفی	sin θ	منفی

۲ ـــ توابع مثلثاتی هر یک زاویه :

تعین علامات زاویهٔ های حاده با دریافت کردن توابع مثلثاتی آنها را ، در دروس گذشته مطالعه کردیم ، و در بخش دوم این فصل راجع به طرز تشخیص کردن علامت توابع مثلثاتی نیز بحث کافی صورت گرفت۰ درین مرحله ما باید نشان بدیهیم که چطور توابع مثلثاتی زاویهٔ های مختلف (بزرگتر از 90° درجه) را معلوم کرده میتوانیم ؟۰

این معلومات در موضوع تحلیل مطالب فزیك ، مانند : قوه ها ، تحلیل مقادیرفزیکی ویکتوری مثل ، سرعت و حل مثلث های کیفی ضروری بوده و مورد بحث قرار میگیرند ۰ بخا طر باید داشته باشیم ، که توابع مثلثاتی آن زاویهٔ که از (90°) درجه بزرگتر باشند ، نمیتوانیم مستقیماً ذریعهٔ بعضی کلکولیتر ها بدست بیا وریم ۰ همچنان نمیتوانیم قیمت توابع آنها را مستقیماً از جداول مثلثات که بدسترس ما میباشند دریافت کنیم۰ جهت ارایهٔ مفهوم فوق ، تحلیل ذیل را در نظر بگیرید :

هر یك زاویهٔ که در حالت ستندرد (stndard position) مو قیعت داشته باشد ، حتماً با چندین زاویهٔ مثبت که کمتر از (360°) درجه باشند در موقف ،° کوترمینل ° " (coterminal) قرار میگیرد ۰ چون یك ضلع زاویهٔ های کوتر مینل با هم مشترك میباشد ، لهذا : توابع مثلثاتی زاویهٔ های باهم کوترمینل از نقطهٔ نظر کمیت (مقدار) با هم یکی میباشند۰ پس اگر ما صرف توابع مثلثاتی زاویه کمتر از (360°) را پیدا کرده بتوانیم ، توابع زاویه های دیگر نیز ، با آسانی معلوم شده میتوا نند ۰

مثال(۱) : زاویه های جورهٔ ذیل با هم کوتر مینل میباشند که قیمت مطلقهٔ توابع مثلثاتی این زاویه ها ی جوره ئی نیز با هم مساوی اند۰

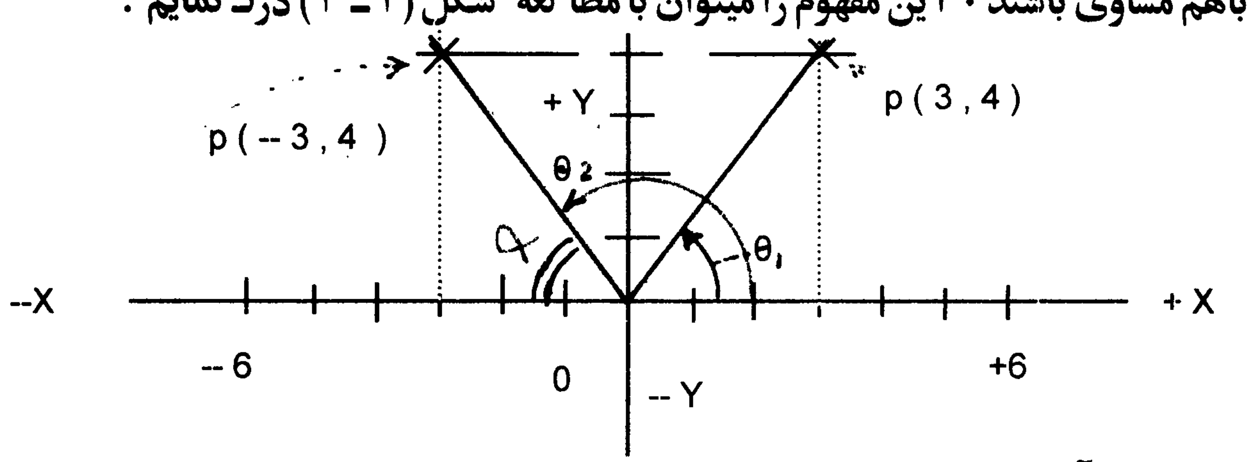
اول	دوم	سوم	چارم
(-60°) و (300°)	(30°) و (390°)	(180°) و (900°)	(-150°) و (210°)

بحث فوق را میتوانیم چنین خلاصه نمود ، قیمت های توابع مثلثاتی زاویه های کوترمینل با هم مساوی اند۰ مثلاً :

$\sin 390^\circ = \sin 30^\circ$ $\quad \tan(-150^\circ) = \tan 210^\circ$ $\quad \sin(-60^\circ) = \sin 300^\circ$ $\quad \cos 900^\circ = \cos 180^\circ$

مطابق تعریفات توابع مثلثاتی ، ما میدانیم که قیمت های توابع مربوط اند به قیمت های x , y , r ۰

قیمت مطلقهٔ توابع مثلثاتی زاویهٔ های ربع دوم مساوی اند با قیمت مطلقهٔ توابع مثلثاتی زاویهٔ های ربع اول در صورتیکه قیمت مطلقهٔ قیمت های(x) و (y) آنها باهم مساوی باشند ۰ این مفهوم را میتوان با مطا لعهٔ شکل (۱ ـ ۲) درك نمأیم :



شکل ﴿ ۱ ــ ۲ ﴾

در شکل (۱ــ۲) برای زاویهٔ (θ_2) که ضلع دوم آن از نقطهٔ p (-- 3 , 4) عبور میکند میتوان نوشته کنیم که ($\tan\theta_2 = 4 / -3$)

و همچنان برای زاویهٔ (θ_1) که ضلع دوم از نقطهٔ p (3 , 4) عبور مینماید ، نوشته کنیم که ($\tan\theta_1 = 4 / 3$) ۰

از طرف دیگر ، مثلث های که زاویهٔ های (θ_1) و (α) درآن شامل اند ، با هم دیگر مساوی و منطبق میباشند ۰

بعبارهٔ دیگر ، زاویهٔ های (θ_1) و (α) با هم دیگر مساوی بوده که در نتیجه قیمت های مطلقهٔ توابع مثلثاتی آنها نیز با هم دیگر مساوی میشوند۰ در نتیجه ، نوشته کرده میتوانیم که : | تمام توابع مثلثاتی زاویه (θ_1) | = | تمام توابع مثلثاتی زاویهٔ (θ_2) | ۰

معادله (۱ــ ۲) ---- $$|F(\theta_1)| = |F(\theta_2)| = |F(\alpha)|$$

در معادلهٔ شکل (۱ ــ ۲) ، حرف F هر گونه تابع اما در اینجاه ، توابع مثلثاتی را نماینده گی میکند. وهاکذا زاویهٔ (α) در معادلهٔ شکل (۱ــ۲) ، بنام زاویهٔ مأخذ (Reference Angle) برای زاویهٔ (θ_2) یاد میشود .

زاویهٔ مأخذ : زاویهٔ مأخذ یك زاویه داده شده ، عبارت از زاویهٔ حاده است که میان ضلع دوم زاویه در هر ربع و محور (X) تشکیل میشود. مثلاً : زاویهٔ (α) در شکل (۱ ــ ۲) عبارت از زاویهٔ مأخذ زاویهٔ (θ_2) است .
با استفاده از معادله (۱ ــ ۲) و این حقیقت که ($\alpha = 180^\circ - \theta_2$) است ، ما خلاصه کرده میتوانیم که قیمت توابع مثلثاتی هر یك زاویه در ربع دوم از رابطهٔ ذیل بدست می آید .

$F(\theta_2) = \pm F(180^\circ - \theta_2) = \pm F(\alpha)$ ------- (۲ــ۲) برای ربع دوم.

علامهٔ معادله فوق مربوط به اینست که آیا تابع در ربع دوم مثبت است ، و یا منفی ؟

مثال(ب) : مطابق شکل (۱ ــ ۲) ، توابع مثلثاتی زاویهٔ (θ) دارای قیمت های ذیل میباشند :

$\sin\theta_2 = +\sin(180 - \theta_2) = +\sin(\alpha) = +\sin\theta_1 = 4/5$

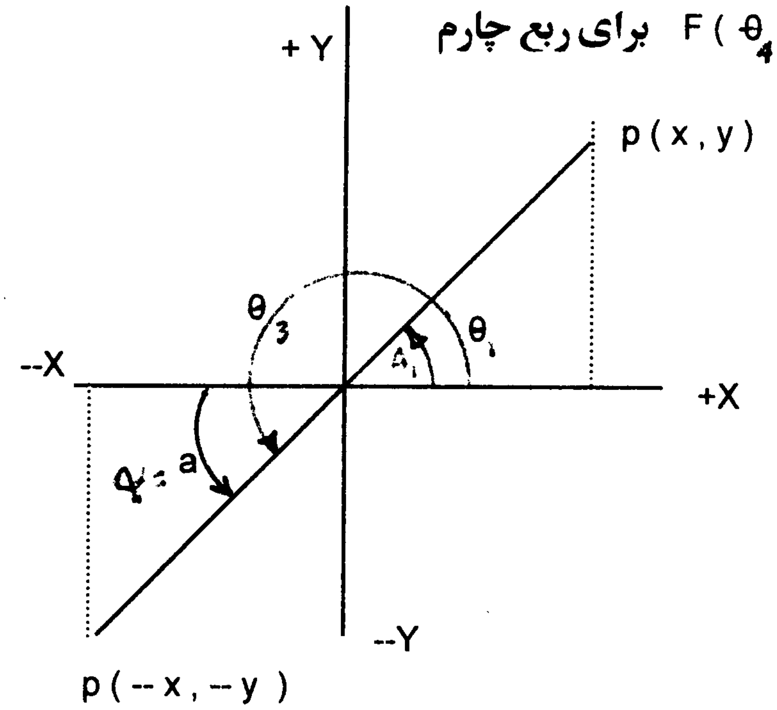
$\cos\theta_2 = -\cos\theta_1 = -3/5,$ $\tan\theta_2 = -4/3,$ $\cot\theta_2 = -3/4$

$\sec\theta_2 = -5/3,$ $\csc\theta_2 = +5/4$

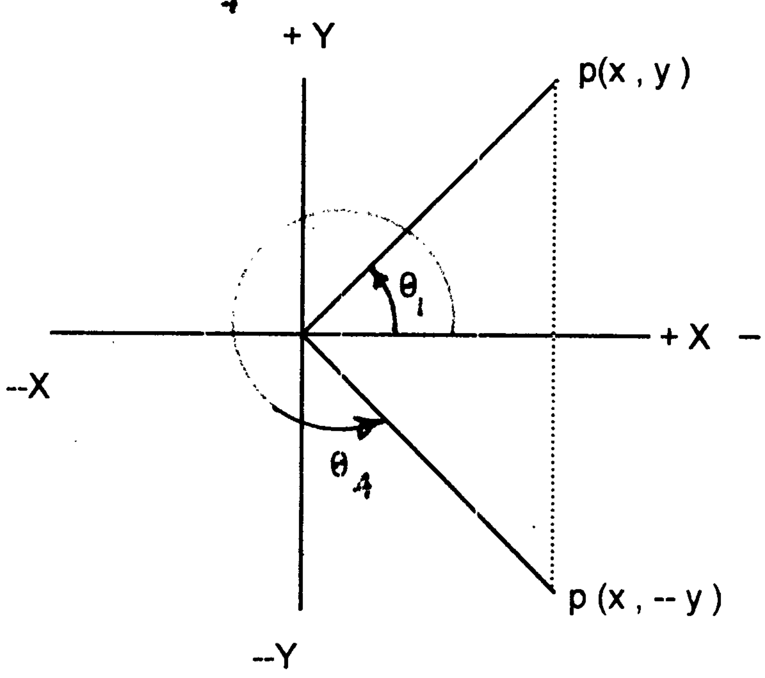
به همین ترتیب ، ما میتوانیم فورمولهای توابع مثلثاتی : ربع سوم و ربع چارم را نیز با پیروی از قواعد فوق بوجود بیاوریم . در شکل (۲ــ ۲) که زاویهٔ مأخذ (α) را میتوانیم با تفریق کردن 180° از زاویه θ_3° دریافت نمأیم . درشکل (۲ــ۲) ملاحظه کرده میتوانیم که قیمت های توابع زاویهٔ α و زاویهٔ θ_3 از نقطهٔ نظر قیمت های عددی با هم مساوی اند. جهت ربع چارم ، شکل (۳ ــ ۲) را در نظر میگیریم . زاویهٔ مأخذ α را میتوان با تفریق کردن θ_4 از زاویهٔ 360° دریافت نمایم.

معادلهٔ (۳ــ ۲)------- $F(\theta_3) = \pm F(\theta_3 - 180^\circ)$ برای ربع سوم

معادلهٔ (٤ــ ۲)------ $F(\theta_4) = \pm F(360^\circ - \theta_4)$ برای ربع چارم



شکل (۲ ـ ۲)



شکل (۳ ـ ۲)

مثال(ج) : در شکل (۲ ــ ۲) ، اگر $\theta_3 = 210^\circ$ باشد ، توابع مثلثاتی زاویهٔ مذکور را با استفادهٔ معادلهٔ (۳ــ ۲) چنین محاسبه شده میتواند .

معادلهٔ (۳ــ ۲)------- $F(\theta_3) = \pm F(\theta_3 - 180^\circ)$ برای ربع سوم

$\sin 210^\circ = -\sin(210^\circ - 180^\circ) = -\sin 30^\circ = -1/2 = -0.5000$

$\cos 210^\circ = -\cos 30^\circ = -0.8660,$ $\tan 210^\circ = +0.5774,$ $\cot 210^\circ = +1.732$

$\sec 210^\circ = -1.155,$ $\csc 210^\circ = -2.000$

درینجاه دیده میشود که زاویهٔ مأخذ عبارت است از: $30° = 180° - 210°$ و ما میتوانیم قیمت توابع مثلثاتی $210°$ را به اساس توابع زاویهٔ $30°$ درجه تشریح نمأیم ۰ اما در مورد علامه گذاری باید بسیار دقیق باشیم ۰

مثال (د) : مطابق شکل (۳ــ۲)، اگر: $\theta_4 = 315°$ با شد، توابع مثلثاتی آن به اساس فورمول (٤ــ۲) چنین محاسبه کرده میتوانیم :

معادلهٔ (٤ــ۲)------ $F(\theta_4) = \pm F(360° - \theta_4)$ برای ربع چارم

لهذا ------ $\sin 315 = -\sin(360° - 315) = -\sin 45° = -0.7071$

$\cos 315° = +\cos 45° = +0.7071$, $\tan 315° = -1.000$, $\cot 315° = -1.000$

$\csc 315° = -1.414$ $\sec 315° = +1.414$,

درینجاه دیده میشود که زاویهٔ $45°$ درجه عبارت از زاویهٔ مأ خذ زاویهٔ $315°$ درجه است ۰

خلاصه : سه فورمول عمده ، جهت دریافت کردن زاویهٔ مأ خذ در ربع دوم ، ربع سوم و ربع چارم در ذیل دوباره تشریح میگردد :

معادلهٔ (۲ــ۲)------ $F(\theta_2) = \pm F(180° - \theta_2) = \pm F(\ \ )$ ---برای ربع دوم۰

معا دلهٔ (۳ــ۲)------- $F(\theta_3) = \pm F(\theta_3 - 180°)$ برای ربع سوم

معادلهٔ (٤ــ۲)------- $F(\theta_4) = \pm F(360° - \theta_4)$ برای ربع چارم

مثال (ه) : با استفاده ازسه فورمول فوق ، توابع زاویه های بزرگتر از $90°$ درجه (بزرگتر از حاده) را به طرز ذیل حل کرده میتوانیم :

$\sin 160° = +\sin(180° - 160°) = \sin 20° = 0.342$, $\tan 110° = -\tan(180° - 110°) = -\tan 70° = -2.747$

$\cos 225° = -\cos(225° - 180°) = -\cos 45° = -0.7071$, $\cot 260° = +\cot(260° - 180°) = +\cot 80° = 0.1763$

$\sec 304° = +\sec(360° - 304°) = \sec 56 = 1.788$, $\sin 357° = -\sin(360° - 357°) = -\sin 3 = -0.0523$

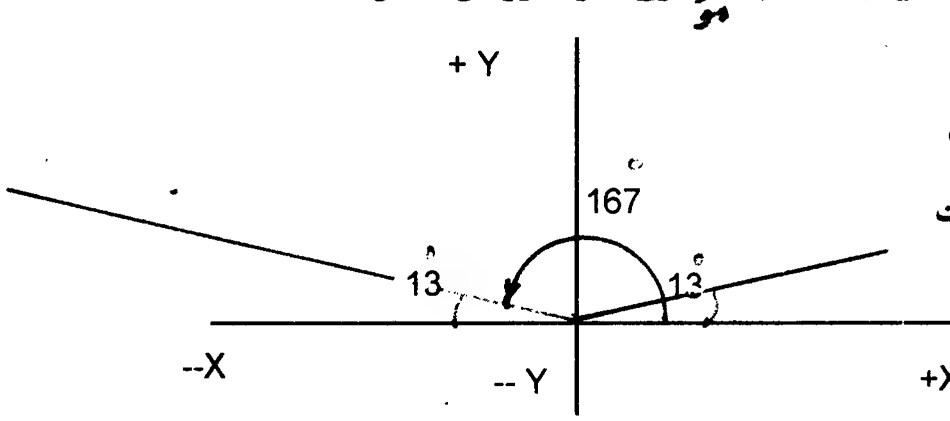
در مثالهای فوق ، قیمت توابع را تا چار خانه مختصر (Round off) ساختیم ۰

ما این کار را از خاطر اجرأ میکنیم که در اکثریهٔ موضوعات ساینسی این کار جأیز است ۰ مثلاً در کلکولیتر ها ی عادی تا هشت رقم مختصر شده میباشد ۰ برای دریافت کردن قیمت های مثالهای ، (ج) ، (د) و (ه) ؛ میتوانیم از کلکولیتر های ساینتیفیک (scientific calculator) استفاده کنیم ۰ استعمال کلکولیتر های ساینسی خیلی ساده است، نخست قیمت زاویهٔ مطلوب را در کلکولیتر ثبت نمأید ۰ بعداً دکمه های توابع (sin , cos , tan)را فشار بدیهید ۰ درین صورت جوابات زاویه ها در کلکین کلکولیتر ظاهر میگردند ، که عبارت از قیمت توابع مطلوب میباشد ۰ اما بخاطر داشته باشید ، برای پیدا کردن توابع (cot , csc , sec) ، در مرحلهٔ اول ، دکمهٔ معکوس (Inverse) را فشار داده ، بعداً دکمه های (sin , cos, tan) را بالترتیب فشار میدیهید ۰ ذریعهٔ کلکولیتر توابع هر زاویه خوانده (دریافت) شده میتواند ، در حالیکه در جداول مثلثاتی کتاب های ریاضی توابع صرف برای زاویه های از ($90° \leq 0°$) درج گردیده میباشند، که توابع بزرگتر از (90) از طریق زاویهٔ های کوترمینل (terminal) دریافت میگردد ۰ حال اگر: ما قیمت تابع مثلثاتی را داشته باشیم و بخواهیم که زاویهٔ مربوطه آنرا ذریعهٔ کلکولیتر پیدا کنیم ، نخست عدد مربوطهٔ زاویه را در کلکولیتر ثبت کرده که زاویه مربوط آن را بعد از فشار دادن دکمهٔ (Inverse) بدست آورده میتوانیم ۰

مثال (و): تابع یك زاویه داده شده است مثلاً : ($\sin\theta = 0.2250$) ، شما زاویهٔ (θ) را دریافت کنید ؟

حل : نخست متوجه باشید که کلکولیتر در موُد درجه بوده باشد ، بعداً عدد (0.2250) را در کلکولیتر ثبت نمأید ، سپس دکمهٔ (Inverse) را فشار داده و بعداً دکمهٔ (sin)را فشار بدیهید ۰ با اجرأ این عمل ، زاویه مربوطه در کلکین کلیکولیتر ظاهر میگردد ۰ ----- ($\theta = 13.002878°$)

یا بعبارهٔ دیگر ، زاویهٔ مطلوب عبارت از (13.002878°) است ۰ اما متوجه بوده باشید که: زاویهٔ (13°)درجه میتواند زاویه مأخذ یك و یا زاویهٔ دیگر که آن عبارت است از: ($\sin(180^\circ - 13^\circ) = \sin 167^\circ = 0.2250$ ، و همثال آن . .
درینجا، ملاحظه شده میتواند که زاویهٔ (θ)دو قیمت گرفته میتواند۰ صحت این دو جواب مربوط به این است که زاویه (θ) در کدام ربع واقع میباشد ۰ در شکل ذیل (٤ ــ ٢) ، موضوع خوب روشن میشود :



است $\sin 13^\circ = 0.2250$
است $\sin 167^\circ = 0.2250$

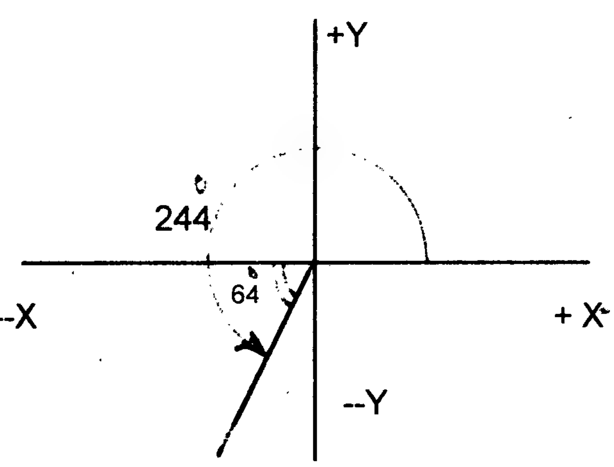
شکل (٤ ــ ٢)

مثال دوم کلکولیتر : زاویهٔ (θ) را در صورت دریافت کنید که قیمت ذیل داده شده باشد:

$(\tan\theta = 2.050 \quad , \quad \cos\theta < 0)$

زاویهٔ θ را در صورتیکه $0^\circ < \theta < 360^\circ$ صدق کند ، پیدا کنید ؟

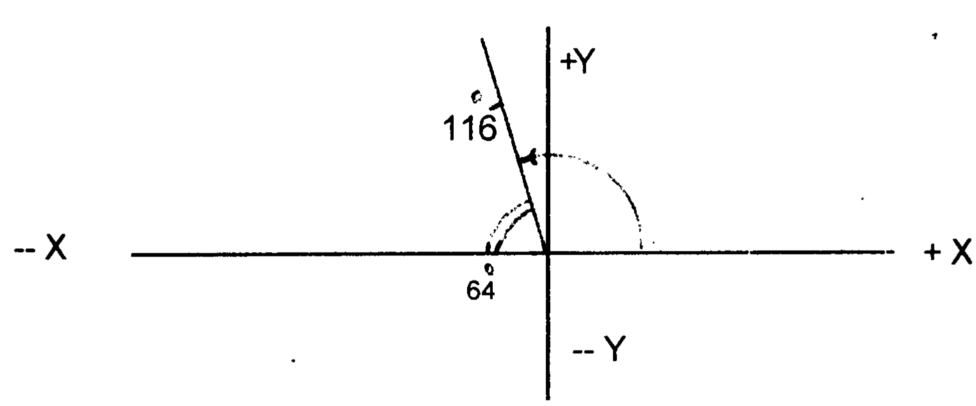
حل : مطابق معلومات داده شده ، cos θ منفی در حالیکه tan θ مثبت میباشد ، لهذا میتوان گفت که زاویهٔ θ در ربع سوم موقعیت دارد ۰ حال در مثال فوق ، زاویهٔ مطلوب را ذریعهٔ کلکولیتر دریافت مینمأیم :
نخست کلکولیتر را در مود درجه قرار میدیهیم ، سپس عدد 2.050 را در کلکولیتر ثبت می نمأیم و دکمه‌های Inverse و سپس tan را باالترتیب فشار میدیهیم که در نتیجه ، در کلکولیتر عدد -63.996654° ظاهر میگردد ، یا بعبارهٔ دیگر زاویهٔ مطلوب عبارت از 64° درجه است ۰ چون نظر به شرأیط داده شده زاویهٔ θ درربع سوم واقع بوده ، لهذأ با زاویهٔ 64° درجه ، نظر به فورمول قبلی زاویهٔ 180° درجه را جمع مینمائیم که در نتیجه ، زاویهٔ مطلوب (244) درجه میشود ۰ شکل ذیل (٥ ــ ٢) را مطالعه نمأید :



شکل (٥ ــ ٢)

حال، اگر تابع زاویه چنین داده شده باشد، $\tan\theta = -2.050$ و همچنان $\cos\theta < 0$ بوده باشد ، درینصورت چنین عملیه را ذریعهٔ کلکولیتر اجرأ می نمأیم : نخست عدد 2.050 را در کلکولیتر ثبت می نمأیم ، سپس دکمه های +/-- , Inv , tan را باالترتیب فشار میدیهیم ، که در نتیجه عدد ذیل در کلکین کلکولیتر ظاهر میگردد ۰
$-63.996654 \cong 64^\circ$ ۰ چون زاویهٔ مأخذ 64 درجه میباشد که زاویهٔ مطلوب آن در ربع دوم موقعیت میگیرد ، لهذا زاویهٔ 64° درجه را از زاویهٔ 180° درجه تفریق مینمأیم که زاویهٔ مطلوب عبارت است از $\boxed{\theta = 116^\circ}$ درجه ۰

شکل (٦ ــ ٢)



با استفاده از فورمول های (۲ ــ ۲) ، (۳ ــ ۲) و (٤ ــ ۲) ، قیمت های تابع هر زاویه پیدا کرده میتوانیم به شرطیکه موقعیت ضلع دوم زاویهٔ مطلوب در یکی از چار ربع تفکیك کرده بتوانیم ۰

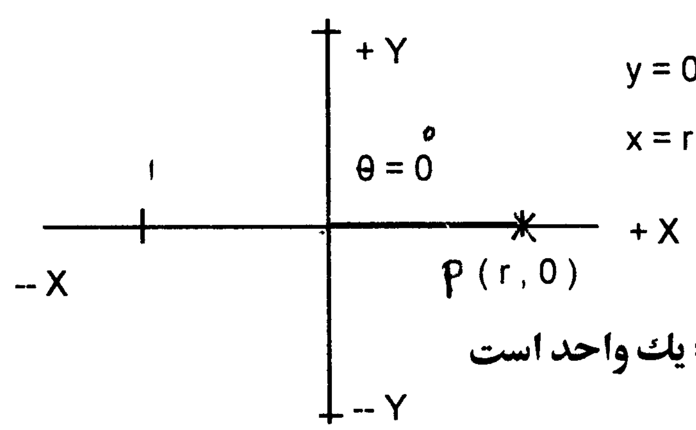
آن عده زاویه های که ضلع دوم آن بالای یکی از محور های X و یا Y واقع شود بنام زاویه های ربعی (Quadrantal angles) یاد میشوند ۰ با استفاده از تعریف توابع مثلثاتی و با درنظرداشت اینکه قیمت r همیشه مثبت بوده (r > 0) جدول ذیل را جهت توابع مثلثاتی زاویه های ربعی ترتیب داده میتوانیم :

زاویه ها	sin θ	cos θ	tan θ	cot θ	sec θ	csc θ
0°	0.000	1.000	0.000	undef.*	1.000	undef,*
90°	1.000	0.000	undef.*	0.000	undef.*	1.000
180°	0.000	--1.000	0.000	--1.000	--1.000	undef.*
270°	--1.000	0.000	undef.*	0.000	undef.*	--1.000
360°	0.000	1.000	0.000	undef.*	1.000	1.000

* به معنی لا یتناهی که به علامهٔ (∞) حرف یونانی نشان داده میشود ـ

در جدول ملاحظه میشود که قیمت توابع 0° درجه زاویه و 360° زاویه مساوی اند ۰

نوت : قیمت های توابع جدول فوق را میتوان با تحلیل چار قیمت زاویهٔ های 0° و 90° در شکل (۷ ــ ۲) صدق کرد ۰

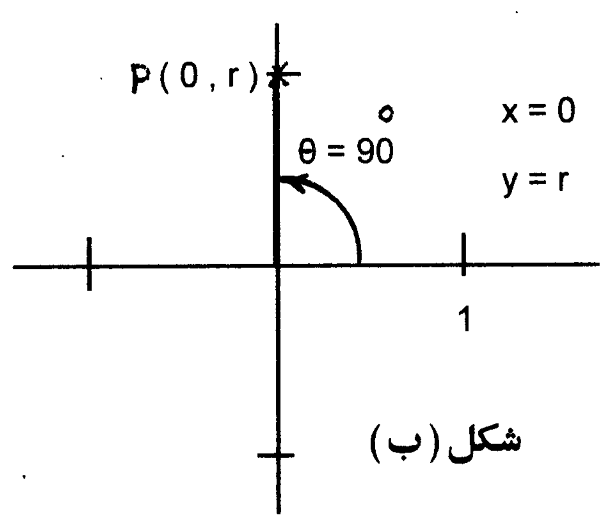


$\sin 0^\circ = y / r = 0 / r = 0$

$\cos 0^\circ = x / r = 1 / r = 1 / 1 = 1$

شعاع دأیره = یك واحد است r = 1 unit

شکل (الف)



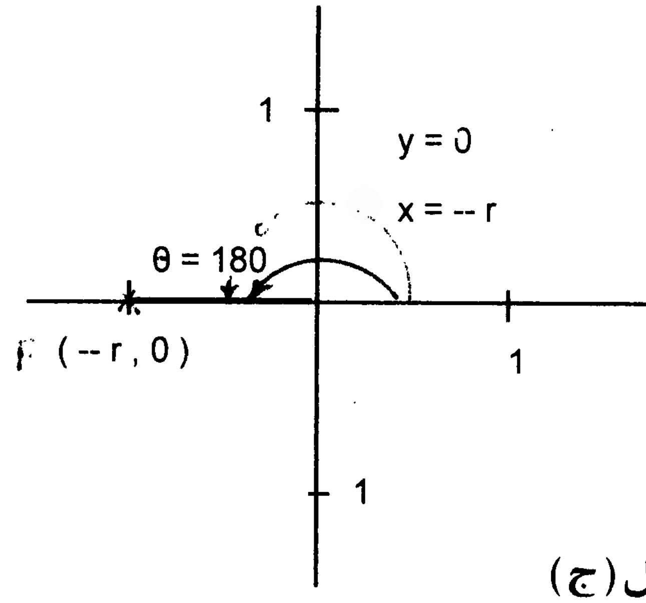
$\sin \theta = y / r = r / r = 1$

$\cos \theta = x / r = 0 / r = 0$

$\tan 90^\circ = y / x = 1 / 0 =$ undefined

شکل (ب)

﴿ شکل (۷ ــ ۲) ﴾



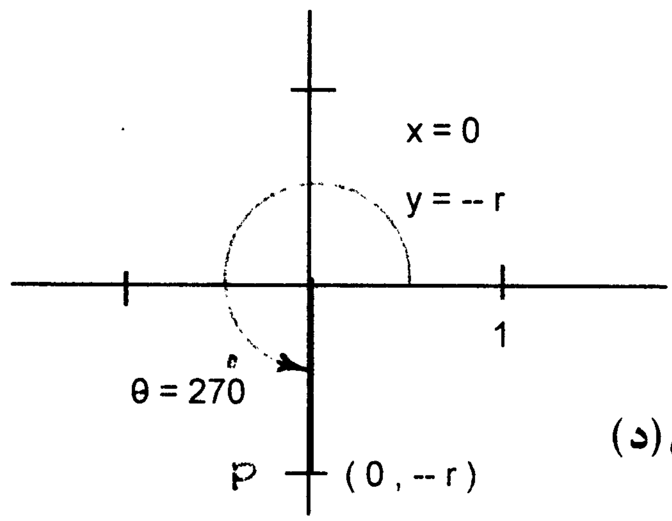
$\sin 180^\circ = y / r = 0 / -1 = 0$

$\cos 180^\circ = -x / r = -1 / 1 = -1$

$\tan 180^\circ = y / x = 0 / -1 = 0$

$\cot 180^\circ = x / y = -r / 0 =$ undefined

شکل (ج)



$\sin 270^\circ = y / r = -r / r = -1$

$\cos 270^\circ = x / r = 0 / 1 = 0$

$\tan 270^\circ = y / x = -r / 0 =$ undefined.

شکل (د)

﴿ شکل (۸ ــــ ۲) ﴾

تمرینات فصل دوم

(۲ ــــ ۲)

۱ ــــ در تمرین های (۱ الی ۸) توابع مثلثاتی را به اساس زاویهٔ حادهٔ مثبت تشریح کنید ؟

1, $\sin 160^\circ$, $\cos 220^\circ$, 2. $\tan 91^\circ$, $\sec 345^\circ$

3. $\tan 105^\circ$, $\csc 302^\circ$ 4. $\cos 190^\circ$, $\cot 290^\circ$

5. $\sin(-123^\circ)$ $\cot 174^\circ$ 6. $\sin 98^\circ$, $\sec(-315^\circ)$

7. $\cos 400^\circ$ $\tan(-400^\circ)$ 8. $\tan 920^\circ$, $\csc(-550^\circ)$

۲ ــــ از تمرین (۹ الی ۱۶) ، قیمت های توابع مثلثاتی داده شده را از طریق دریافت کردن زاویهٔ مأخذ پیدا کنید ؟ از کلکولیتر استفاده کرده علامهٔ مربوط را به آن علاوه نمأید .

9. $\sin 195^\circ$, 10. $\tan 311^\circ$, 11. $\cos 106.30^\circ$ 12. $\sin 103.40^\circ$

13. $\tan 219.15^\circ$, 14. $\cos 190.82^\circ$ 15. $\sec 328.33^\circ$ 16. $\cot 136.53^\circ$

۳ــــ از تمرین (۱۷ الی ۲٤) قیمت های توابع مثلثاتی را مستقیماً ذریعهٔ کلکولیتر دریافت کنید ؟

17.	tan 152.40	18.	cos 341.40	19.	sin 310.36	20.	tan 242.68
21.	cos 110.25	22.	sin163.59	23.	csc 194.82	24.	sec 261.05

٤ــــ در تمرین (۲۵ الی ۳۲) زاویهٔ θ را تا به نزدیکترین قیمت (0.01°) دریافت کنید در صورتیکه $0 \le \theta \le 360$ باشد۰ از کلکولیتر استفاده کنید ۰

25.	$\sin\theta = -0.8480$	26.	$\tan\theta = -1.830$	27.	$\cos\theta = 0.4003$
28.	$\sin\theta = 0.6374$	29.	$\tan\theta = 0.2833$	30.	$\cos\theta = -0.9287$
31.	$\cot\theta = -0.2126$	32.	$\csc\theta = -1.098$		

٥ــ از تمرین (۳۳ الی ٤۰)، زاویهٔ θ را تا به نزدیکترین قیمت 0.01 درجه ، در صورت پیدا کنید که $0° \le \theta \le 360°$ باشد ۰ از کلکولیتر استفاده کنید ۰

33.	$\sin\theta = 0.8708,\ \cos\theta < 0$	34.	$\tan\theta = 0.9326,\ \sin\theta < 0$
35.	$\cos\theta = 0.1207,\ \tan\theta > 0$	36.	$\sin\theta = -0.1921,\ \tan\theta < 0$
37.	$\tan\theta = -1.366,\ \cos\theta > 0$	38.	$\cos\theta = 0.5726,\ \sin\theta < 0$
39.	$\sec\theta = 2.047,\ \tan\theta < 0$	40.	$\cot\theta = -0.3256,\ \sin\theta > 0$

٦ــــ از تمرین (٤۱ الی ٤٤) ، توابع مثلثاتی را در حالت دریافت کنید که شرأیطداده شدهٔ ذیل صدق کند ؟

		وقتیکه		باشد		شود
41.	$\tan\theta = ?$,	________	$\cos\theta > 0$	________	$\sin\theta = -0.5736$	________
42.	$\sin\theta = ?$,	________	$\tan\theta < 0$	________	$\cos\theta = 0.4226$	________
43.	$\cos\theta = ?$,	________	$\csc\theta > 0$	________	$\tan\theta = -0.8098$	________
44.	$\cot\theta = ?$,	________	$\sin\theta < 0$	________	$\sec\theta = 1.112$	________

۷ــــ از تمرین (٤٥ الی ٤۸) ، علامهٔ مناسب $<$, $>$, $=$ را بین افاده های ذیل داحل نمأید ؟

45.	sin 90° 2 sin 45° ,	46.	cos 360° 2 cos 180°
47.	tan 180° tan 0° ,	48.	sin 270° 3 sin 90°

۸ــ از تمرین (٤۹ الی ٥۲) فورمول ها ی فیزیك را ارزیابی نموده ، قیمت های مجهول آنرا ذریعهٔ کلکولیتر دریافت کنید ؟

49. $$\frac{F}{\sin 115°} = \frac{46.0}{\sin 35°}$$ قوهٔ F به پوند است

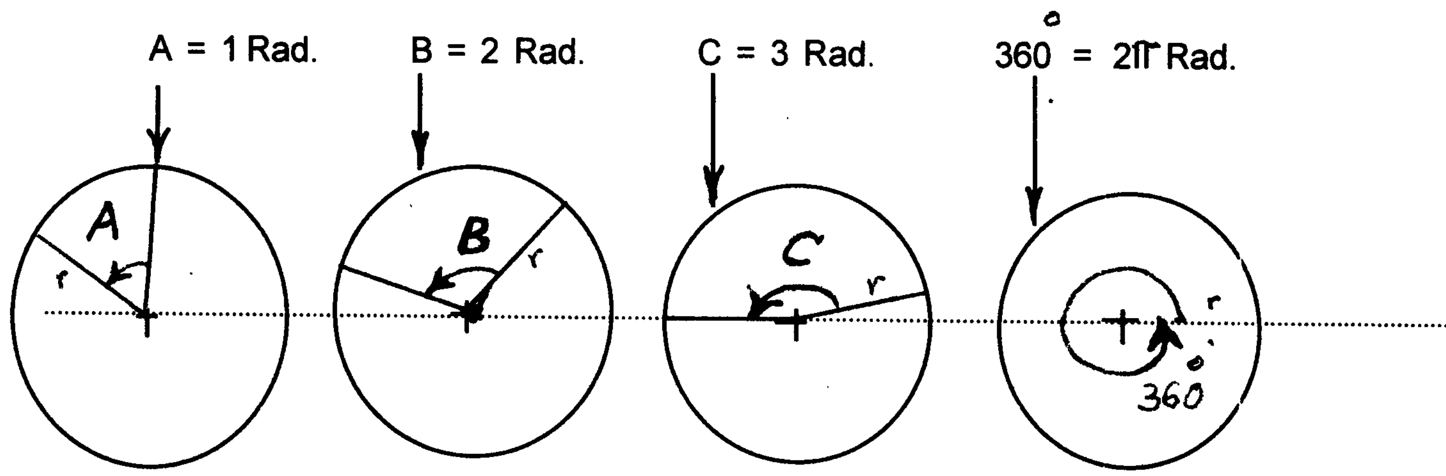
۹ــ ولتاژ برق را از معادلهٔ ذیل دریافت کنید ؟

50. $V = 100 \cos 560°$

۱۰ ــــ مساحت مثلث که دو ضلع و زاویهٔ مابین آنها معلوم باشد ، از رابطهٔ ذیل دریافت میگردد۰

51. مساحت مثلث $(A) = (1/2)(a \times b)(\sin C)$

مساحت A را در صورت پیدا کنید که : $a = 37.2$, $b = 57.2$, $C = 157.0°$



شکل ﴿۴ـ۱﴾

اجزای درجه:

برای تعین اجزای درجه ، دو نوع تقسیمات موجود میبا شند : یك طریقه تقسیم این واحد به اعشاری بوده که اکثراً کلکولیتر ها وکمپیوتر ها زاویه را به قسم اعشاری استعمال میکنند. طریقه دومی آنست که واحد مذکور به دقیقه و ثانیه تقسیمات گردیده. دقیقه به علامهٔ (′) و ثانیه به علامهٔ (″) نشان داده میشود. اجزائ واحد درجه رادر ذیل ملاحظه نمائید :

یك درجه مساوی است به شصت دقیقه ($1° = 60'$) ، و یك دقیقه مساوی است به شصت ثانیه ($1' = 60''$)

در شکل (۳ ـ ۱) مشاهده میشود که اضلاع اولی ، و دومی زاویه های (α) و (B) یکی بوده (باهم منطبق اند) به این منظور این دوزاویه را به نام زاویهٔ های، (Coterminal) ـ کوترمینل یکدیگر یاد میکنند. شناخت و تشخیص زاویه های (کوترمینل) برای مفاهیم بعدی مثلثات مهم است.

مثال :

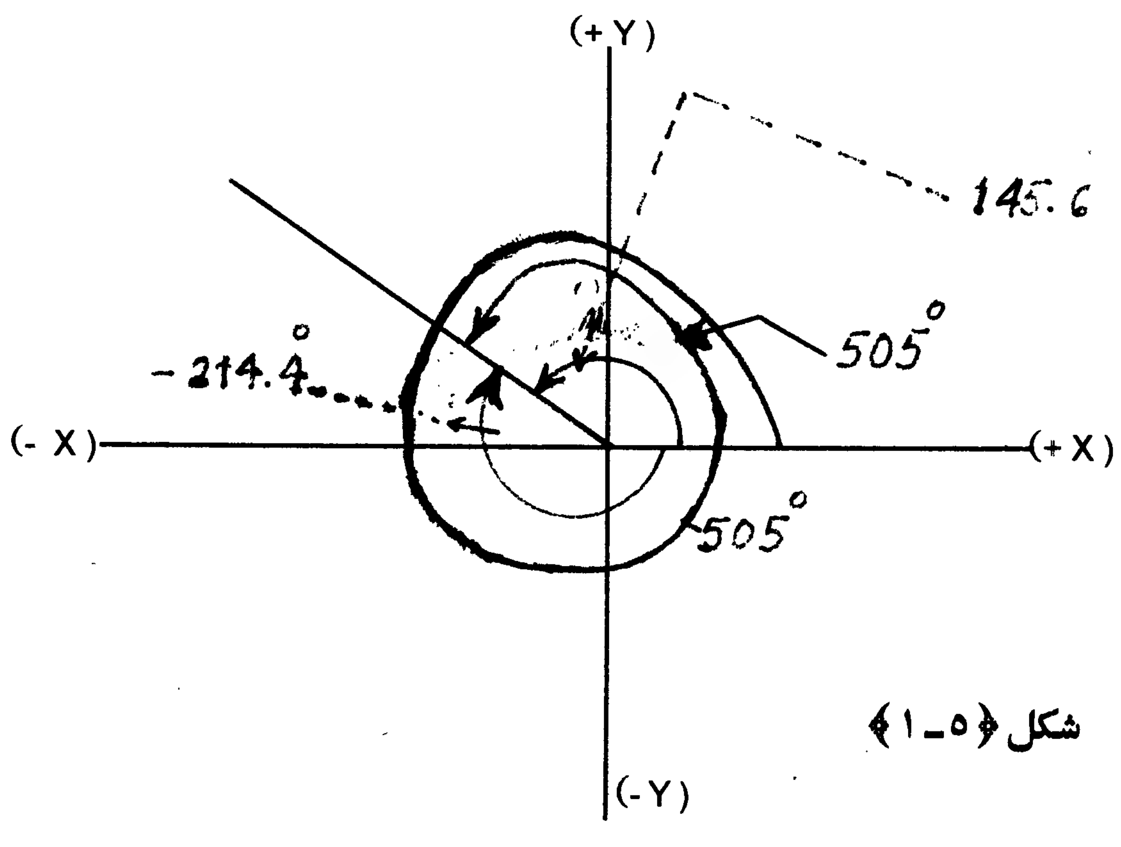
قیمت های دوزاویهٔ را که با زاویهٔ ($145.6°$) کوترمینل باشد در یافت کنید ؟

حل : چون یك دوران مکمل ، ($360°$) درجه است ، زاویه کوترمینل کلانتر از ($360°$) عبارت است از :

$505° = 145.6° + 360°$ وزاویه دوم کوترمینل عبارت است از : ($-214.4° = 145.6° - 360°$). بخاطر داشته باشید که زاویهٔ دومی وقتی کوترمینل زاویهٔ ($145.6°$) شده میتواند که آنرا علامهٔ منفی بدیهیم.

لهذا ، دوزاویهٔ که کوترمینل زاویهٔ ($145.6°$) شناخته میشوند ، عبارت اند از : (الف) ، ($505.6°$) و (ب) ، ($-214.4°$)

یا به عبارهٔ دیگر : زاویه های ، ($145.6°$ ، $505.6°$ و $-214.4°$) با هم کوترمینل اند. شکل (۵ ـ ۱) را ملاحظه نمأید.



شکل ﴿۵ـ۱﴾

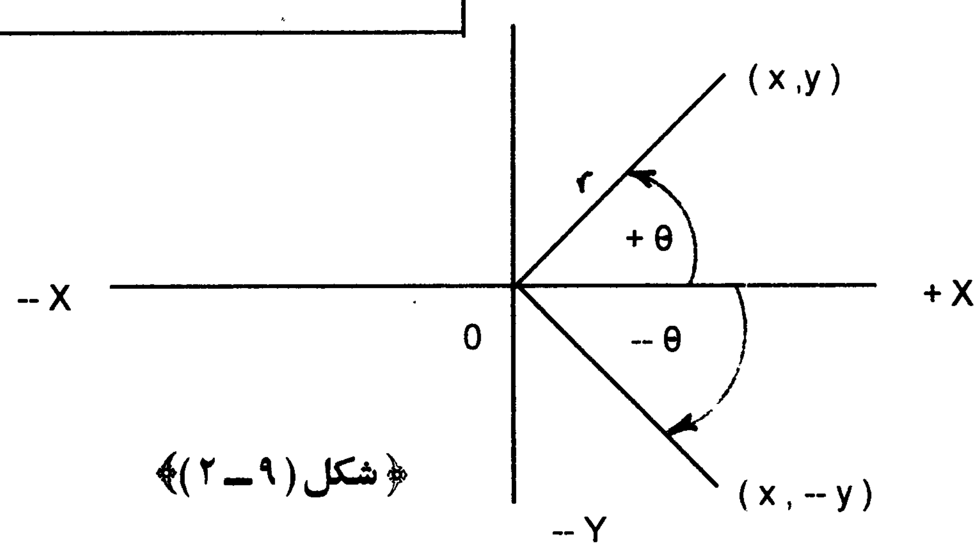
۵۲ ــــ یك سرویر میخواهد که مساحت یك پارچه زمین مثلث ـ شکل را توسط فورمول سوال قبلی (سوال ۱۰) ، دریافت نمأید در صورتیکه ، $a = 273\ m$, $b = 156\ m$, $C = 112.5^{\circ}$ مساحت موصوف را دریافت کنید ؟

۵۳ــــ از تمرین (٥٤ الی ٥٦) زاویۀ منفی ارأیه شده ، توابع مثلثاتی زاویه های موصوف را در صورت دریافت کنید که فورمول های ذیل صدق کنند ؟

در شکل (۹ ـ ۲) زاویه های $+\theta$ و $-\theta$ نشان داده شده است ، که $\sin\theta = y / r$ ، $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ ۰ که با در نظر داشت علامات توابع و تحلیل شکل (۷ ــ ۲) روابط ذیل نیز صدق میکنند :

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$, $\cos(-\theta) = \cos\theta$,
$\sec(-\theta) = \sec 0$, $\csc(-\theta) = -\csc\theta$

$\tan(-\theta) = -\tan\theta$, $\cot(-\theta) = -\cot\theta$



﴿ شکل (۹ ــ ۲) ﴾

مطابق فورمول های فوق ، توابع ذیل را دریافت کنید ؟

54. (a) $\sin(-60^{\circ})$, (b) $\cos(-176^{\circ})$

55. (a) $\tan(-100^{\circ})$, (b) $\cot(-215^{\circ})$

56. (a) $\sec(-310^{\circ})$, (b) $\csc(-35^{\circ})$

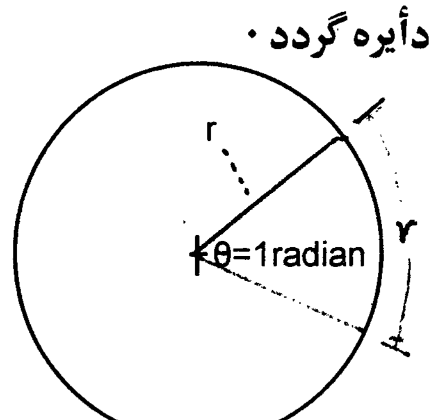
(۲ ــ ۲) رادین (Radian) :

جهت حل اکثره پرابلم هائیکه توابع مثلثاتی درآن بکار میروند ، نشان دادن زاویه به واحد درجه کا فی است ، اما در بعضی موضوعات فزیك ، زاویه به یك واحد دیگر نیز ضرورت میشود ، که آن عبارت از : رادین (Radian) است ۰

در دروس گذشته واحد رادیان ، را که یکی از واحدات اهم زاویه میباشد معرفی کردیم ۰ حال واحد رادین را بیشتر تحت مطالعه قرار میدیهیم ۰

تعریف رادین : یك رادین ، عبارت از مقدار زاویۀ است که هر گاه رأس آن زاویه را در مرکز یك دا ٔیره قرار بدیهیم ، طول قوس مقابل این زاویۀ مرکزی مساوی به طول شعاع همان دأیره گردد ۰

﴿ شکل (۱۰ ــ ۲) ﴾



﴿ شکل (۸ ــ ۲) ﴾

از طرف دیگر ، میدانیم که محیط دأیره از طریق شعاع آن توسط فورمول ذیل میگردد :

$C = 2\pi \times (r)$ (محیط دأیره)

نسبت محیط و شعاع دأیره :

$$\frac{C}{r} = \frac{2\pi \times r}{r} = 2\pi = 6.28$$

یا ......

$C = (6.28)(r)$ *rad.*

از این تحلیل بر می آید که طول دورانی (محیط یك دأیره ، $C = (6.28)(r)$ است) . یا محیط هر دأیره (6.28 چند شعاع همان دأیره) است . و همچنان ، مشاهده میشود که ، زاویه مرکزی یك دایره عبارت از 360° درجه میباشد و به مقدار ($(6.28)(r)$) زاویهٔ ــ رادین در هر دأیره موجود است . شکل (۱۱ ــ ۲) .

از رابطهٔ فوق دریافت کرده میتوانیم :

2π rad. $= 360^\circ$

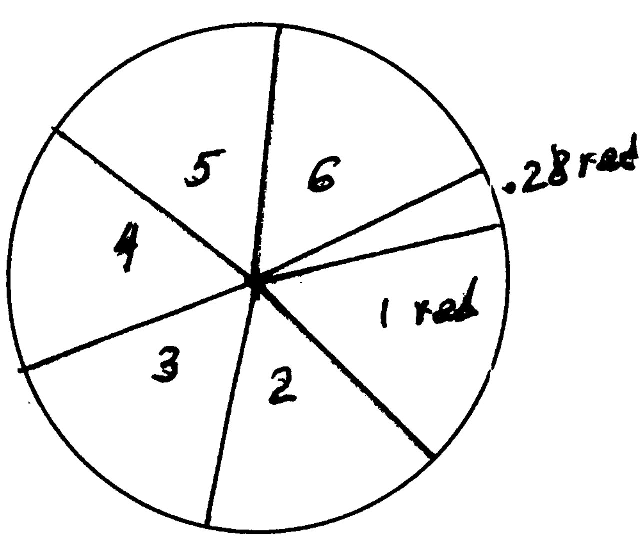
یا π rad. $= 180^\circ$ ....(2 - 7)

$1^\circ = \pi / 180^\circ$ (rad.) = 0.01745 rad. .... (2 - 8)

(6.28) rad. $= 360^\circ$, or , (2π) rad $= 360^\circ$

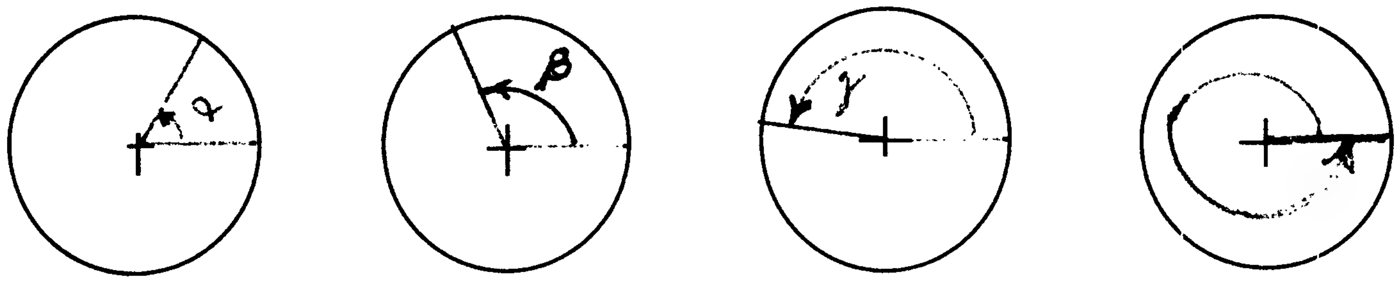
یا .... 1 rad. $= 180^\circ / \pi = 180^\circ / 3.1416 = 57.30^\circ$ .... (2 - 9)

1 rad. $= 57.30^\circ$



﴿ شکل (۱۱ ــ ۲) ﴾

در شکل (۱۲ ــ ۲) زاویهٔ های α ، β ، γ ، و ، 360° از جنس رادین نشان داده شده است :



α = 1 radin β = 2 radians γ = 3 radians $360^\circ = 2\pi$ radians

﴿ شکل (۱۲ ــ ۲) ﴾

از مساوات (۷ـ۲) ، (۸ـ۲) و (۹ـ۲) چنین نتیجه میگیریم که :

۱ ـ اگر زاویه به واحد درجه داده شده باشد ، و بخواهیم آنرا به ریدین تبدیل کنیم ، در آن صورت مقدار زاویه به واحد درجه را به ، $\pi / 180$ ضرب مینمأیم ۰

۲ ـ بر عکس ، اگر زاویه به واحد ریدیان داده شده باشد ، و بخوا هیم آنرا بدرجه تبدیل کنیم ، درین صورت مقدار زاویه به واحد رادین را به $180 / \pi$ ضرب مینمایم : مثال های ذیل را مطالعه نمأید ،

مثال (۱) : دو زاویه به واحد درجه، 18° درجه و 120° درجه است ، آنها را به واحد ریدین تبدیل کنید ؟

$$18.0^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} \times 18.0^\circ = \frac{\pi}{10} = \frac{3.1416}{10} = 0.3142 \text{ radian........ (a)}$$

$$120^\circ = \frac{\pi}{180} \times 120^\circ = \frac{6.28}{3} = 2.09 \text{ radian.......(b)}$$

مثال (۲) : تبدیل کردن واحد ریدین به واحد درجه: دوزاویه که هر کدام : 0.4 rad. و 2.0 rad. میباشند به درجه تبدیل کنید ؟

$$0.4 \text{ rad.} = \frac{180^\circ}{\pi} (0.4) = \frac{72}{3.14} = 22.9^\circ \text{ ....(a)}$$

$$2.0 \text{ rad.} = \frac{180}{\pi} (2.0) = \frac{360}{3.14} = 114.6^\circ \text{ ....(b)}$$

نظر به تعریف ریدین ، بسیار عام است که زاویه ریدین را به حرف یونانی π نشان بدیهیم ۰ زاویه های که به حرف π تشریح میشود ، در مثالهای ذیل توضیح گردیده است :

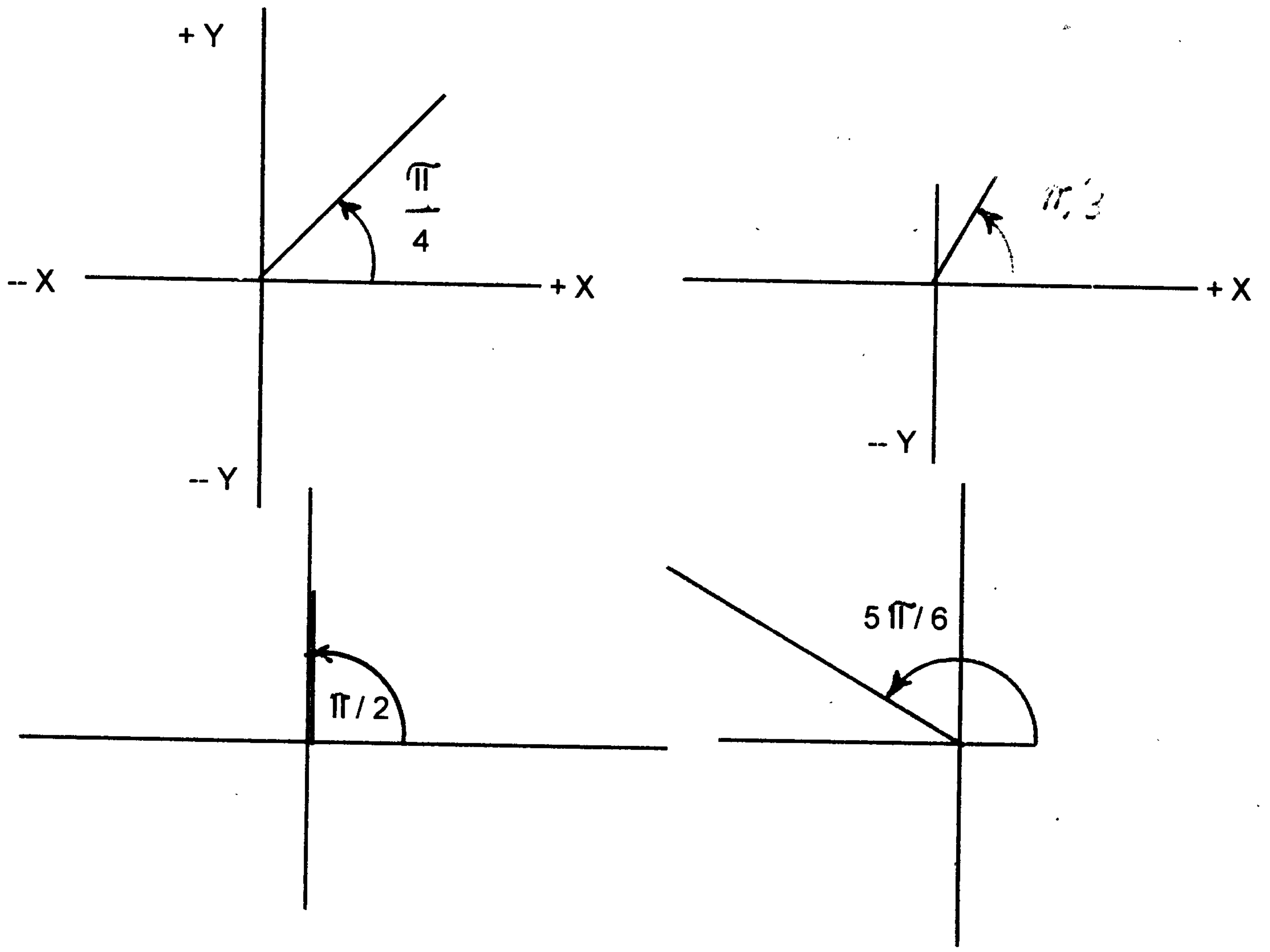
$$30^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} (30^\circ) = \frac{\pi}{6} \text{ rad.} \qquad 45^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} (45^\circ) = \frac{\pi}{4} \text{ rad.}$$

$$\frac{\pi}{2} \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \times \frac{\pi}{2} = 90^\circ \qquad \frac{3\pi}{4} \text{ rad.} = \frac{180^\circ}{\pi} \times \frac{3\pi}{4} = 135^\circ$$

هر گاه یك زاویه واحد نداشته باشد ، نشان ده آنست که واحد زاویه ریدین میباشد ۰

مقایسه این دو واحد در زاویه های ذیل مطالعه نمأید ۰

Radian	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
Degrees	0	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°



مثال (۳) : یك زاویه 3 رادین است آنرا به درجه و دقیقه تبدیل کنید ؟

حل :

$$3 \text{ radians} = 3\,(180^\circ / \Pi) = 171.88734^\circ = 171^\circ + 0.88734^\circ$$

$$(0.88734)^\circ = (0.88734)(1^\circ) = (0.88734)(60') = 53.2404' = 53' + 0.240' \qquad , =====> 1^\circ = 60'$$

لهذا $3 \text{ rad.} = 171.88734^\circ = 171^\circ\ 53.2404'$

توابع مثلثاتی برای زاویه های ربعی در جدول ذیل حلاصه میشوند :

زاویه های ربعی به مقیاس دو واحد :

زاویه به درجه	رادین به مقیاس Π	ریدین به اعشاری
90°	Π / 2	1.571
180°	Π	3.142
270°	3/2 Π	4.712
360°	2 Π	6.283

مثال (٤) : میخواهیم که زاویهٔ مأخذ زاویه 3.403 رادین را دریافت نمأیم :

حل : چون زاویهٔ 3.403 بزرگتر است از 3.142 وخوردتر است از 4.712 ، این مفهوم دارد که زاویه موصوف در ربع سوم موقعیت دارد ٠ وزاویهٔ مأخذ آن عبارت است از : $3.402 - \Pi = 0.260$ ٠ دراینجاه از کلید Π باید استفاده شود ٠

مثال (۵) : زاویهٔ 5.210 در کدام ربع واقع بوده و زاویهٔ مأخذ آنرا دریافت نمأید ؟

حل : چون زاویهٔ 5.210 بین 4.712 و 6.283 واقع است ، به این مفهوم که خود زاویهٔ 5.210 در ربع چارم موقعیت داشته و زاویهٔ مأخذ آن عبارت است از : $2\pi - 5.210 = 1.073$ ، میشود ٠

$$60^\circ = \left(\frac{\pi}{180^\circ}\right)(60^\circ) = \frac{\pi}{3} = 1.05 \text{ rad} \ldots\ldots 6$$

مثال (٦) : زاویه 60 درجه را به رادین تبدیل کنید ؟

حل : ----------

$$2.5 = \left(\frac{180^\circ}{\pi}\right)(2.5) = \left(\frac{450^\circ}{3.14}\right) = 143^\circ \ldots\ldots 7$$

مثال (۷) : زاویهٔ 2.50 رادین را به درجه تبدل نمأید ؟

حل :..

بعضی کلکولیتر ها کلیدی دارد که با استفادهٔ آن میتوانیم زاویهٔ که به واحد درجه داده شده باشد ، آنرا مستقیماً به رادین تبدیل نمأیم ٠ یا برعکس ، رادین را به درجه تبدیل کنیم ٠ همچنان ، ما میتوانیم توابع مثلثاتی زاویهٔ را که به ریدین نشان داده شده باشد آنرا ذریعهٔ کلکولیتر مستقیماً دریافت نمایم ٠ بعضی کلکولیتر ها ، برای استفادهٔ درجه و رادین دکمه های جداگانه دارند٠ ونوع دیگر ، از طریق دکمهٔ (Mode) به درجه ویا رادین اعیار شده میتواند ٠ مثلاً ، اگر به مود درجه باشد ، زاویه را بدرجه واگر به مود رادین باشد درآنصورت توابع زاویه های با رادین را دریافت کرده میتواند ٠

مثال : میخواهیم sin 0.4538 را توسط کلکولیتر دریافت کنلم ؟°

حل : نخست کلکولیتر را در مود رادین اعیار مینمایم، بعداً عدد 0.4538 را در کلکولیتر راجستر مینمأیم ، سوس دکمهٔ sin را فشار میدیهیم که در نتیجه در صفحه کلکولیتر عدد 0.4383841 ظاهر میگردد که این مفهوم را دارد :

$\sin 0.4538 = 0.4384$

به همین ترتیب ، $\tan 0.9977 = 1.550$

و همچنان ، $\cos 1.074 = 0.4766$

در حالت خاص ، یك زاویه مأخذ به واحد رادین مطلوب است ٠ و برای آنکه بدانیم زاویهٔ مورد نظر در کدام ربع قرار دارد ، روابط ذیل را باید بخاطر داشته باشیم ٠

مثال : زاویهٔ θ را به واحد رادین دریافت کنید در صورتیکه $0 < \theta < 2\pi$ ، $\cos\theta = 0.8829$ باشد ٠

حل : چون قیمت θ محدود است بین θ و 2π ، پس ما باید زاویهٔ مطلوب را در ربع اول و ربع چارم جستجو نمأیم ، زیرا $\cos\theta$ در ربع اول و چارم مثبت است ٠ لهذا ، در کلکولیتر نخست عدد 0.8829 را در صورت راجستر مینمایم که کلکولیتر به مود رادین اعیار شده باشد ٠ بعداً دکمه (Inv) را فشار داده در اخیر دکمهٔ (cos) را فشار میدیهیم ، که در نتیجه عدد 0.4888 در کلکین کالکولیتر ظاهر میگردد ٠ $\text{ARCCOS } \theta = \cos\theta$

یا ------- در ربع اول ⟶ $\theta = 0.4888$ rad.

در ربع چارم ، ------ $\cos(2\pi - 0.4888) = \cos(6.283 - 0.4888) = \cos 5.794$

فلهذا : $\theta = 0.4888$ rad. , $\theta = 5.794$ rad.

اگر ما نوشته کنیم که :

اول ------- $\sin 1 = ?$

دوم ------- $\sin\theta = 1$

در اینجا مشابهتی به نظر میرسد که موضوع را اندکی مبهم میسازد ٠

در رابطهٔ اول $\sin 57.30^\circ$ مطلوب است ، زیرا یك ریدین مساوی به 57.30° درجه میشود، و در رابطهٔ دوم زاویهٔ مطلوب آنست که sin آن مساوی به ۱ میباشد · یا $\theta = 90^\circ$ درجه ، زیرا که $\sin 90 = 1$ است ·

مثال ذیل موضوع را خوبتر واضح میسازد ؛

$$\sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}/2 \qquad \pi/3 = 60^\circ$$

$$\sin 0.6050 = 0.5688 \ , \quad 0.6050 \text{ rad.} = 34.66^\circ$$

$$\tan \theta = 1.709, \qquad \theta = 59.67^\circ$$

$$59.67^\circ = 1.041 \text{ rad.} \ , \quad \tan 1.041 = 1.709$$

﴿ تمرین (۲ــ۳) ﴾

از تمرین (۱ الی ۸) ، زاویه های ارایه شده را به ریدین از قرار π دریافت کنید ؟

1.	$15^\circ, 150^\circ$	2.	$12^\circ, 225^\circ$	3.	$75^\circ, 330^\circ$
4.	$36^\circ, 315^\circ$	5.	$210^\circ, 270^\circ$	6.	$240^\circ, 300^\circ$
7.	$160^\circ, 260^\circ$	8.	$66^\circ, 350^\circ$		

از تمرین (۹ الی ۱۶) ، زاویه های ارأیه شده را به درجه تبدیل نمأید

9.	$2\pi/5 \ , \ 3\pi/2$	10.	$3\pi/10 \ , \ 5\pi/6$	11.	$\pi/18 \ , \ 7\pi/4$
12.	$7\pi/15 \ , \ 4\pi/3$	13.	$17\pi/18 \ , \ 5\pi/3$	14.	$11\pi/36 \ , \ 5\pi/4$
15.	$\pi/12 \ , \ 3\pi/20$	16.	$7\pi/30 \ , \ 4\pi/15$		

از تمرین (۱۷ الی ۲٤) زاویه های ارأیه شده را به رادین تبدیل کنید ؟

17.	210°	18.	54.3°	19.	252°	20.	104°	21.	333.5°	22.	168.7°
23.	178.5°	24.	86.1°								

از تمرین (۲۵ الی ۳۲) زاویه های ارأیه شده را به درجه تبدیل کنید ؟

25.	0.75	26.	0.24	27.	3.00	28.	1.70	29.	2.45	30.	34.4
31.	16.4	32.	100								

از تمرین (۳۳ الی ٤۰) توابع مثلثاتی مطلوب را طوری دریافت نمأید که نخست زاویه داده شده به درجه تبدیل شوند ؟

33.	$\sin(\pi/4)$	34.	$\cos(\pi/6)$	35.	$\tan(5\pi/12)$	36.	$\sin 7\pi/6$
37.	$\cos(5\pi/6)$	38.	$\tan(4\pi/3)$	39.	sec 4.592	40.	cot 3.273

از تمرین (٤۱ الی ٤۸) توابع ذیل ذریعهٔ کلکولیتر مستقیماً دریافت کنید ؟

41.	tan 0.7359	42.	cos0.9308	43.	sin4.24	44.	tan 3.47
45.	cos 2.07	46.	sin 2.34	47.	cot 4.86	48.	csc 6.19

از تمرین (٤٩ الی ٥٦) زاویه θ را دریافت کنید در صورتیکه $0 \leq \theta < 2\pi$ قیمت بگیرد . $\theta \to rad.$

49. $\sin\theta = 0.3090$ 50. $\cos\theta = 0.9135$ 51. $\tan\theta = -0.6742$

52. $\sin\theta = -0.0436$ 53. $\cos\theta = 0.6742$ 54. $\tan\theta = 1.860$

55. $\sec\theta = -1.307$ 56. $\csc\theta = 3.940$

٥٧ ــــ در موضوع فزیك نور جهت دریافت کردن شدت نور اعظمی رابطهٔ $\tan\alpha = \alpha$ صدق میکند . شما نشان بدهید که مقدار زاویه مساوی است به $\alpha = 1.43\ (\pi)$

٥٨ ــــ ولتاژ لحظوی یك سیستیم برق 120 v. و 60 Hz. با معادلهٔ $v = 170 \sin 377\, t$ ارأیه گردیده . که دراین معادله t از قرار ثانیه ، وقت است بعد ازآنکه جنیریتر چالان میشود . شما ولتاژ جنیریتور را (الف) بعد از 0.001 ثانیه و (ب) بعد از 0.010 ثانیه دریافت کنید ؟

٥٩ ــــ سرعت یك جسم در نوسان منظم در اینجا داده شده است . شما سرعت v از طریق قیمت های توضیح شدهرا پیدا کنید ؟

$$v = A\sqrt{\frac{K}{m}}\cos\sqrt{\frac{K}{m}}\ t$$

$t = 0.001$ sec, $m = 36$ gr. , $K = 400$ gr./sec^2, $A = 5.0$ cm.

٦٠ ــــ جهت پیدا کردن مقدار غلطی در زاویه ایلیوشن یك تعمیر ، فورمول ذیل داریم .

$\varepsilon = x(\theta_1 - \theta)\sec^2\theta = ?$ که $(\theta_1 - \theta)$ به رادین اندازه شده .

$x = 180$ ft , $\theta_1 = 30.5^\circ$, $\theta = 30.0^\circ$

﴿موارد تطبقی زاویه که به رادین اندازه میشود﴾

پیمایش زاویه به واحد رادین در ریاضی و تیکنالوژی بسیار عملی بوده ، ودر حل پرابلم های مربوط سهولت زیاد را فراهم میسازد . چنانچه در تمرین های گذشته ، چند مثال آنرا ملاحظه نمودیم . اینست در بخشهای بعدی تطبیق زاویه های به واحد رادین در موضوعات هندسه و فزیك بیشتر تحلیل کرده آنرا عمیقاً تحت مطالعه قرار میدیهیم :

نظر به تعریف واحد رادین و علم هندسه ، طول قوس که در مقابل زاویه مرکزی یك دأیره قرار میگیرد متناسب است به طول شعاع همان دأیره . اگر طول قوس دأیره را به S نشان بدیهیم پس میتوانیم برای یك دأیره مکمل نو شته کنیم

که ، $S = 2\pi r$.

از طرف دیگر ، میدانیم که مقدار زاویهٔ مرکزی یك دأیره به واحد رادین مساوی است به $\theta = 2\pi\, rad.$

لهذا : طول قوس دأیره را چنین افاده کرده میتوانیم $S = r\theta$ که S طول قوس در مقابل زاویهٔ θ و r عبارت از شعاع دأیره ، و θ زاویه مرکزی برای هر یك زاویه به واحد رادین .

مثال (اول) : اگر شعاع یك دأیره r = 3 inch بوده و زاویه مرکزی آن $\theta = \pi/6$ باشد ، طول قوس مقابل این زاویه را دریافت کنید؟

حل :

$S = (\pi/6)(3) = \pi/2 = 1.57$ inches .

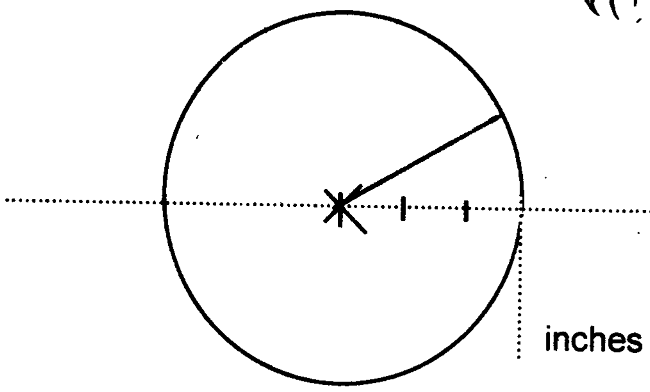
در-------- (شکل ١٣ ــ ٢ الف) ، رسم آنرا ملاحظه فرمأیید .

مثال (دوم) : اگر طول قوس یك دأیره در مقابل زاویه مرکزی آن ، $S = 7.20$ cm وزاویه مرکزی دأیره ، $\theta = 150^\circ$ درجه باشد ، میتوانیم طول شعاع این دأیره را چنین محاسبه نمأیم .

حل : $S = r\theta$ ؟ یا " $r = S/\theta$ شکل (١٣ ــ ٢) (ب)

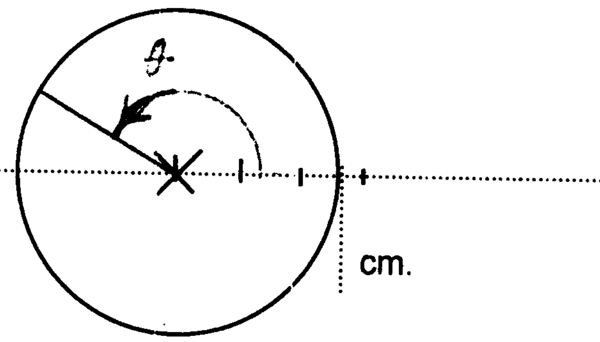
$$r = \frac{7.20}{150^\circ \times \pi/180^\circ} = \frac{7.20 \times 180}{150 \times \pi} = 2.75 \text{ cm}$$

﴿ شکل (۱۳ ــــ ۲) ﴾



$r = 3$ in , $\theta = \pi / 6$, $S = 1.57$

شکل الف



$r = 2.75$ cm, $\theta = 150$, $S = 7.20$ cm

شکل ب

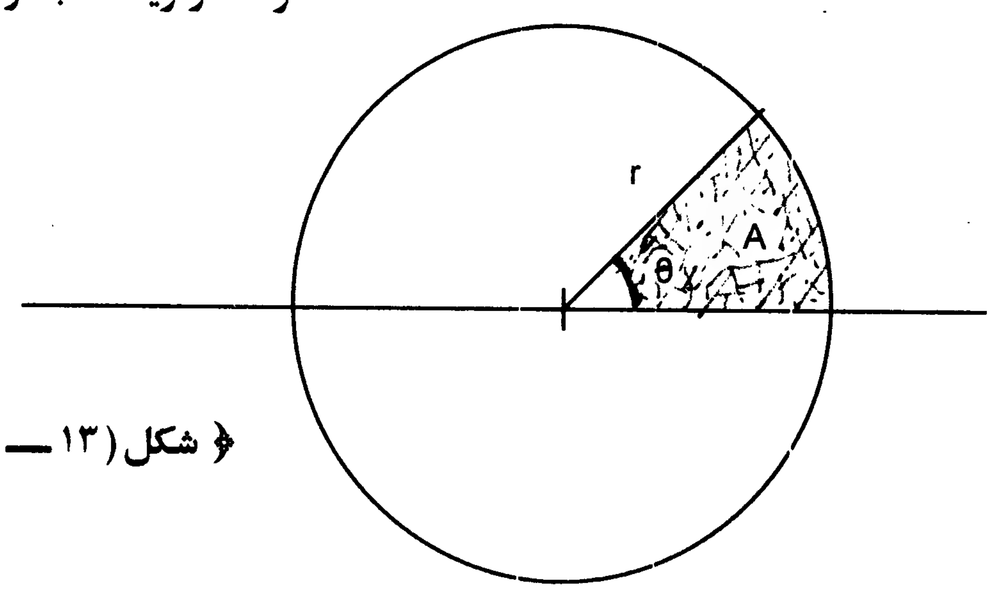
استفاده از واحد رادین در علم هندسه :

مساحت سیکتور (Sector) دأیره و یا طول قوس یك دأیره در مقابل زاویهٔ مرکزی آن دأیره صرف و صرف به اساس واحد رادین صدق میکند ، در شکل (۱٤ ــ ۲) ، مساحت سیکتور یك دأیره صرف میتوانیم ازطریق زاویه به واحد رادین دریافت نمأیم ۰

ثبوت مساحت سیکتور یك دأیره : فورمول یك دأیره عبارت است از : $A = \pi r^2$ که میتوان آنرا چنین نیز نوشته کرد: $A = 1/2\ (2\pi)\ r^2$ ، از طرف دیگر ، میدانیم که زاویهٔ مرکزی یك دأیره به واحد رادین مساوی است به ، $\theta = 2\pi$ rad. ، حال قیمت θ را در فورمول فوق تعویض مینمأیم که :

$$A = (1/2)(\theta)(r^2) \quad .... \quad (2 -- II)$$

واحد زاویهٔ θ به رادین است ۰



﴿ شکل (۱۳ ــــ ۲) ﴾

مثال (اول) : مساحت سیکتور یك دأیره که زاویهٔ مرکزی آن 218° درجه و شعاع دأیره $r = 5.25$ in. باشد ، چنین محاسبه میشود ۰ شکل (۱٤ ــ ۲) ۰ (الف)

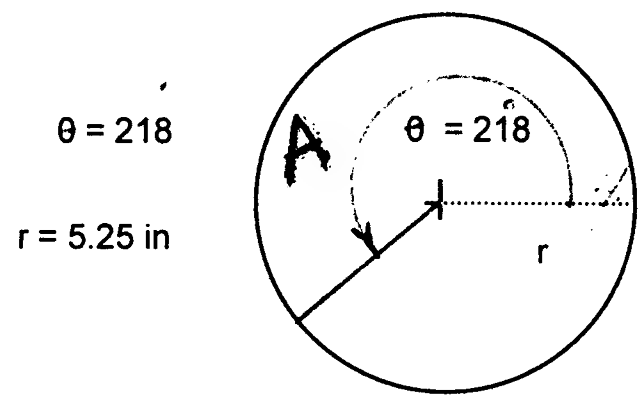
حل : فورمول .... $A = 1/2\,(\theta)\,r^2$

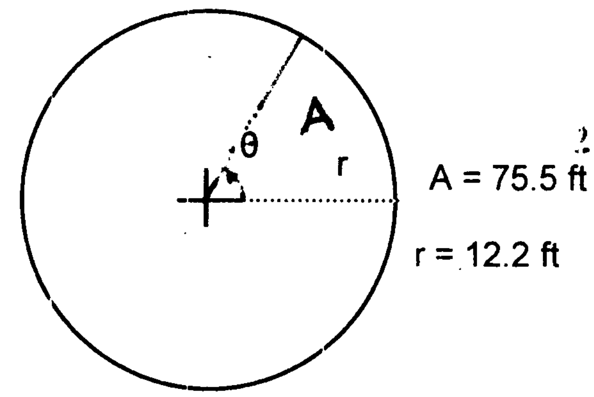
لهذا ....

218 deg. $= (\pi / 180$ rad.$)\,(218) = 3.8$ rad ۰

$A = (1/2)(\theta)(r^2) = (1/2)(3.8)(5.25^2) = 52.4$ Sq in

مثال دوم : مساحت سیکتور (sector) یك دأیره 5 .75 فت مربع است ، و شعاع دأیره هذا 12.2 فت میباشد ۰
زاویۀ مرکزی دأیره را پیدا کنید ؟ ـ ـ ـ ـ ـ شکل (١٤ ــ ٢) (ب)
حل :





A = (1 / 2) (θ) (r²) , θ = (2 A) / (r²)

0 = (2 X 75.5) / (12.2²) = 1.01 rad.

شکل (الف)　　　　　شکل (ب)

شکل (١٤ ــ ٢)

نوت : بخاطر باید داشت ، این فورمول وقتی صدق میکند که زاویۀ θ به واحد رادین اندازه شود ۰ مورد دیگر استفاده از واحد رادین در محاسبه سرعت است ۰ ما میدانیم که سرعت اوسط .V ave از رابطۀ ذیل محا سبه شده میتواند :

در اینجاه ، .V ave سرعت اوسط ، d فاصله و t وقت است ۰

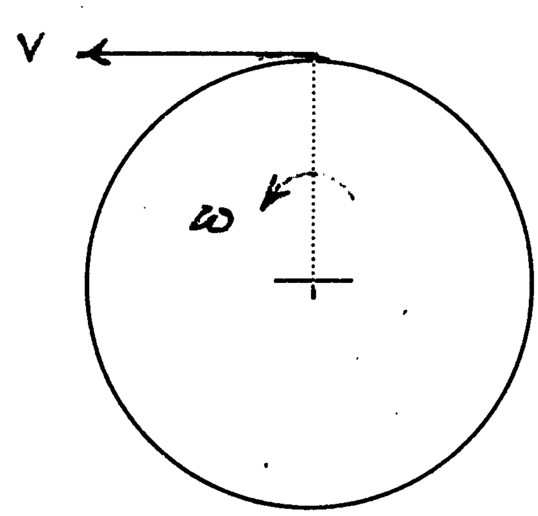
$$V_{ave.} = \frac{d}{t}$$

اگر یك جسم به سرعت دأیروی حرکت میکند فاصلۀ را که جسم طی خواهد کرد ، عبارت است از محیط دأیره . S = 2πr ۰ از طرف دیگر :
حال هر دو طرف معادله فوق را به t تقسیم مینمأیم ° دروس گذشته .... S = (r) θ

$$\frac{S}{t} = V \dashrightarrow \frac{S}{t} = \frac{\theta(r)}{t} \dashleftarrow \frac{\theta}{t} = \omega$$

$$\boxed{V = \omega (r)}$$ ، فلهذأ ------ (١٢ــ٢)

سرعت زاویۀی به اومیگا ــ ω :



شکل (١٥ ــ٢)

معادلۀ (١٢ ــ ٢) رابطه بین سرعت خطی V
و سرعت زاویوی ω را نشان میدیهد که یك جسم بدور دأیره
که شعاع آن r بوده حرکت میکند۰ شکل (١٥ ــ ٢) ۰
درین شکل ویکتور سرعت v مماس است به دأیره ۰ سمت حرکت
v بطور متداویم در تغیر است زیرا سرعت به مسیر دأیروی میباشد۰

در همچو مسأیل باید ، قبل از اینکه ،فورمول (۱۲ ــــ ۲) را بکار ببریم واحد ا میگاه ـ ـ (w) باید به رادین بوده باشد ·

مثال : یك جسم به حرکت دأیروی .w = 0.125 rad./sec بالای مسیر دأیروی حرکت میکند ، که شعاع دأیره موصوف 90 m است ، سرعت دورانی جسم را دریافت نمأید ؟

حل : $v = w \times r = (0.125)(90) = 11.3 \ m / sec.$

مثال دوم : یك عدد چرخ (فلای ویل) به سرعت دائیروی 20 دور فی دقیقه حرکت میکند · اگر شعاع این چرخ 18 in . باشد ، سرعت خطی یك نقطه بالای کنار چرخ را دریافت نمأید ؟ حل : میدانیم که دریك دوران مکمل ، 2 π rad. زاویه

لهذا $w = (20 \ rpm / min)(2\pi \ rad) = 40\pi \ rad / min.$

از طرف دیگر . ... $v = wr = (40\pi \ rad / min)(18 \ in) = 2,260 \ in / min.$

مفهوم فوق اینست که سرعت خطی نقطهٔ مذکور عبارت است از:

$$v = (2,260 \ in /min.)(ft / 2.54 \ in) = (188 \ ft / min)(min / 60 \ sec) = 3.14 \ ft /sec$$

مثا ل سوم : تسمه (belt) ، یك پولی 10.0 فت طول دارد ، و پولی موصوف در ظرف دو ثانیه یك دور مکمل را تکمیل میکند · اگر شعاع این پولی .6.00 in باشد ، سرعت زاویوی (دور فی دقیقه) یك نقطه بالای کنار پولی معلوم کنید ؟

حل : چون سرعت خطی نقطه در کنار پولی مساوی است به سرعت تسمه ، لهذا : $v = 10 / 2 = 5 \ ft /sec$

شعاع پولی $r = 6 \ in = 0.5 \ ft$ و با استفاده از معادلهٔ (۱۲ ـــ ۲) ـ ـ ـ $v = wr$ ..... (2 --- 12)

$v = wr$

$5 = w(0.5)$, $w = 5 / 0.5 = 10 \ rad /sec = 600 \ rad / min = 95.5 \ rpm/min.$

$$10 \ \frac{rad}{sec} \times \frac{60 \ sec}{min} = \frac{600 \ rad}{min} , \quad \frac{600 \ rad / min}{2\pi \ rad / rpm} = \frac{600 \ rad}{min} \times \frac{1 \ rpm}{2\pi \ rad} = 95.5 \ rpm$$

مثال چهارم : جریان لحظوی برق در یك سرکت برق متناوب با معادلهٔ ذیل ارأیه میشود · جریان برق یك سرکت را تحت شرأیط ذیل دریافت کنید ؟

(جریا ن لحظوی) $i = I \sin 120 \pi t$

قیمت i , در صورت پیدا کنید که :

$t = 0.005 \ sec$, $I = 0.0685 \ A$ داده شده باشد ·

حل : $i = 0.0685 [\sin 120 (\pi \cdot 0.005)] = 0.0651 \ A$

میتوانیم این سوال را ذریعهٔ کلکولیتر چنین حل نمأیم : نخست کلکولیتر را به مود رادین اعیار نمائد ·

0.0685 (X) (( ) (120) (X) (π) (X) 0.005 ( )) (sin) = 0.651 X

هنگامیکه ، کلکولیتر و یا کمپیوتر را در محاسبات ریاضی بکار میبریم ، لازم می افتد که ریدین (radian) را به درجه و ها کذأ درجه را به ریدین (Radian) تبدیل کرده بتوانیم : به این منظور ما از رابطهٔ که یك ریدین تقریباً مساوی است به (57.30°) ، استفاده می نمایم ، ($1 \text{ radian} = 57.30^\circ$) ٠

$$360^\circ = 2\pi \text{ radian},$$

$$180^\circ = \pi \text{ radian}, \quad \text{radian} = 180^\circ/3.14 = 57.30^\circ$$

مثال:

1.5 radian را به درجه تبدیل کنید ؟

حل : چون $1 \text{ radian} = 57,30^\circ$

$1.5 \text{ radian} = X^\circ$

پس $X = (1.5)(57.30) \text{ radian}/1\text{radian} = \underline{85.95^\circ}$ جواب

اکثراً جداول مثلثاتی زاویه ها را به دقیقه و ثانیه نشان میدهد ،در حالیکه تیکنالوژی جدید،کلکولیتر و کمپیوتر از سیستم اعشاری استفاده میکنند٠ ازینرو لازم است تا مقدار های اعشاری را به دقیقه و ثانیه وهمچنان دقیقه و ثانیه را به اعشاری تبدیل کرده بتوانیم٠

مثال اول : $43^\circ\ 24'$ را به سیستم اعشاری تبدیل کنید ؟

حل : چون $1^\circ = 60'$

و $X^\circ = 24'$

لهذا $X = 24/60 = \underline{0.4^\circ}$ جواب 43.4°

مثال دوم : $17^\circ\ 53'$ را به شکل اعشاری تبدیل کنید ؟

حل : چون $1^\circ = 60'$

و $X^\circ = 53'$

لهذا $X = (53/60)(1) = \underline{0.88^\circ}$ جواب 17.88°

مثال سوم : 154.36° را به سیستم درجه و دقیقه تبدیل کنید ؟

حل : چون $1^\circ = 60'$

و $0.36^\circ = X'$

$X = (0.36)60/1 = 21.6 = \underline{22'}$ جواب $154^\circ\ 22'$

هر گاه ضلع اولی یك زاویه بالای طرف مثبت محور (X) واقع بوده و رأس زاویه در نقطهٔ صفر محور(X) و محور (Y) موقیعت داشته باشد ، درینصورت میگویند این زاویه به حالت ستندرد (Standard) قرار دارد٠ چنین زاویه به اساس موقیعت ضلع دومی ، که در کدام ربع موقیعت دارد ، شناخته میشود٠ فرضاً ضلع دومی یك زاویه ستندرد در ربع دوم موقیعت بگیرد ، پس این زاویه را بنام زاویه (ربع دوم) می گوٌیم و اگر ضلع دومی زاویهٔ ستندرد در ربع سوم واقع شود آن زاویه(ربع سوم) نامیده میشود ـــ و امثال آن ---

هر گاه ضلع دومی یك زاویه بالای یکی از محور های (X) و یا (Y) منطبق شود ، این زاویه را بنام زاویهٔ ربعی - (quadrantal angle) می نامند٠

تمرین (۳ ـــ ۲)

الف ـــ سوالات عبارتی (۱ الی ۳٤) را حل نمأید ؟

۱ـــ شعاع یك دأیره 10 in است ، طول قوس که در مقابل زاویهٔ مرکزی 60° درجه این دأیره قرار میگیرد ، پیدا کنید ؟

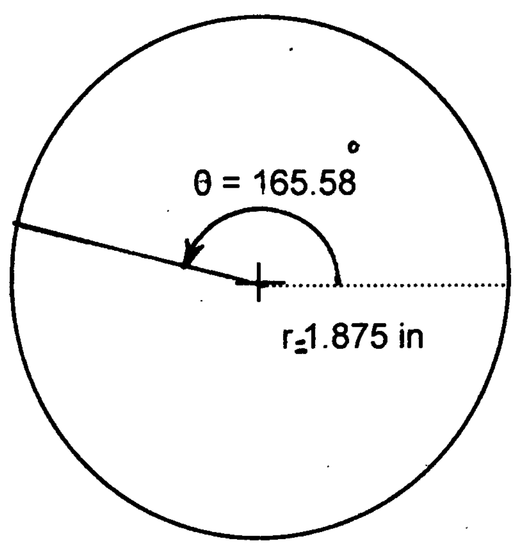
۲ـــ قطر یك دأیره 4.5 ft است ۰ شما طول قوس که در مقابل زاویهٔ مرکزی 42° درجه قرار میگیرد ، دریافت کنید ؟

۳ـــ مساحت سیکتور های که در پرا بلم های ۱ و ۲ تشکیل میشوند ، دریافت نمأید ؟

٤ـــ مساحت سیکتور یك دأیره را که در مقابل زاویهٔ مرکزی 120° درجه تشکیل میشود ، در صورت دریافت کنید که اگر قطر این دأیره مساوی 56 cm باشد ؟

٥ـــ یك حصهٔ پایپ لین گاز طبعی که طول آن 3.25 کیلو متر میشود ، قوس یك دأیره را تشکیل مید هد ۰ اگر شعاع این دأیره 8.25 کیلو میتر باشد زاویه مرکزی دأیره مذکور را دریافت کنید ؟

٦ـــ شکل (١٦ ـــ ٢) سیکتور یك دأیره بودد که نمایند ه گی از یك ـ کیم شفت ـ موتر مینماید ۰ محیط قوس آنرا پیدا کنید ؟



شکل (١٦ ـــ ٢)

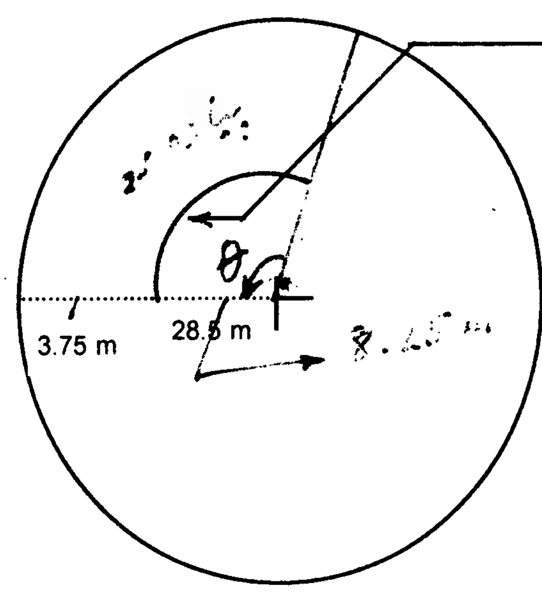
۷ـــ یك آب پاش به فاصلهٔ 65 ft دور تر آب را در چمن پاش میدهد ، اگر این آب پاش به زاویهٔ 115° درجه دوران کند ۰ معلوم کنید که آب پاش مذکور چقدر مساحت چمن را آبپاشی کرده است ؟

۸ـــ یك روشنی انداز به زاویهٔ افقی 75° درجه یك منطقه را روشن میسازد ۰ اگر روشنی این چراغ به اندازهٔ 250 ft دورتر بتابد ، مساحت را که این چراغ روشن منمأید دریافت کنید ؟

۹ـــ اگر یك موتر سرعت دأیروی (گردش U) را در ظرف ٦ ثانیه اجرا نماید ، اوسط سرعت زاویهٔ وی این موتر درین گردش چند است ؟

۱۰ـــ رولر پرینتر یك کمپیو تر در یك دقیقه (2,000) دور را تکمیل می نماید ۰ سرعت زاویوی این رولر را دریافت کنید ؟

۱۱ـــ مساحت یك پیاده رو که در شکل (۱۷ ـــ ۲) نشان داده شده ، در صورت پیدا کنید که قوس بیرونی و داخلی آن بشکل دأیروی بوده باشد ؟



شکل (۱۷ ـــ ۲)

۱۲ ـــ طول بازوی یك برف پاك موتر (windshield) 12.75 in است ، وبه وسط آن پل برف پاك كه طول آن 15 in بوده ، قایم گردیده است ، برف پاك موصوف به چه اندزه مساحت را پاك خواهد كرد ، اگر حركت زاویوی این برف پاك 110° درجه زاویه را احتوا كند؟

۱۳ ـــ یك رقاص(pendulum) كه طول آن 3 ft است به زاویهٔ 5 درجه نوسان میكند ، طول قوس را دریافت كنید ، كه بین آخرین نقاط نوسان تشكیل میشود؟

۱٤ ـــ شعاع كرهٔ زمین در حدود (3,960) میل است ، طول قوس خط استوی را دریافت كنید ، كه به زاویهٔ مركزی كرهٔ زمین درمقابل زاویهٔ یك درجه احتوا میشود؟

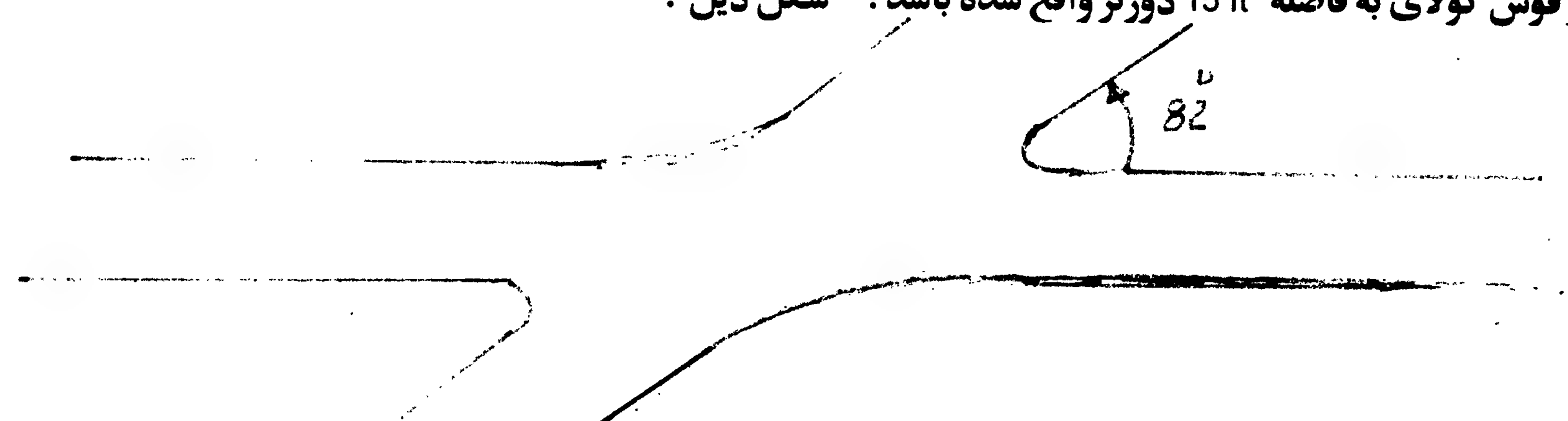
۱۵ ـــ یك طیاره به سرعت 540 كیلو میتر فی ساعت در یك مسیر دأیروی برای دو دقیقه پرواز میكند ، شعاع این دأیره را دریافت كنید در صورت كه قوس طی شدهٔ به زاویهٔ مركزی 8° درجه زاویه احتوا شده باشد؟

۱٦ ـــ عقربه یك امپیر میتر به زاویهٔ 52° درجه انحراف می نماید ، عقربهٔ موصوف درین حالت جریان برقی 0.25 امپیر را اندازه میكند ، اگر طول این عقربه 3.75 in بوده و سكل دأیروی در امپیر مبتر موصوف بكار رفته شده باشد ، زاویهٔ انحراف را برای جریان برقی اعظمی 1.5 امپیر ، دریافت كنید؟

۱۷ ـــ یك چرخ به سرعت 300 دور فی دقیقه دوران میكند ، اگر شعاع این چرخ 6 cm باشد ، یك نقطه بالای كنار چرخ چقدر فاصله را در ظرف 30 ثانیه طی خواهد كرد؟

۱۸ ـــ پره های چرخ موتور یك كشتی به سرعت 130 رادین در فی دقیقه دوران میكند ، سرعت خطی یك نقطه بالای پرهٔ چرح چند خواهد بود ، درصورتیكه طول این پره 22.5 cm باشد؟

۱۹ ـــ در یك چاراهی ، دو سرك به زاویهٔ 82° درجه باهم ملاقی میشوند ، طول قوس در نقطه گولأی را در حالت پیدا كنید كه مركز قوس گولأی به فاصلهٔ 15 ft دورتر واقع شده باشد؟ شكل ذیل :



۲۰ ـــ در یك دأیره ترافیكی جاده شهر، یك موتر 1 / 3 حصهٔ محیط دأیره را طی نموده است ، كه عبارت از 0.125 km. مصافه شده است ، شعاع این دأیره ترافیكی را معلوم كنید؟

۲۱ ـــ یك موتر به سرعت 60 miles فی ساعت كه 88 ft / sec میشود در حال حركت است ، قطر تایر های موتر 24.5 in است ، سرعت زاویوی تایر های موتر موصوف به واحد رادین فی ثانیه ، دریافت نمأید؟

۲۲ ـــ سرعت یك نقطه را بالای سطح زمین نظر به گردش زمین ~~در خط~~ استوا دریافت كنید ، (تمرین ۱٤ را ملا حظه نمأید)

۲۳ ـــ فضأ نوردی ، در كشتی فضأی خویش به دور مهتاب یك دوران را در ظرف 1.95 ساعت تكمیل میكند ، ارتفاع فضأ نورد از زمین ثابت بوده و 70 mile میباشد ، (شعاع مهتاب 1,080 mile است)؟

۲٤ ـــ یك نفر در حال قدم زدن در چمن ، به سرعت 3 ft / sec یك ماشین كبل دروی را كه قطر آن (2 ft) است تیله میكند ، درین اثنا چرخ ماشین كیبل دروی چند دور فی دقیقه (پرغت فی دقیقه) میحورد؟

۲۵ ـــ در عمل اهتزاز یك عدد سپرینگ ، فاصلهٔ پیشرفت (فاصلهٔ تغیر موقیعت) به (Y) نشان داده شده است ، كه قیمت Y به رابطهٔ ($Y = 3.55 \cos 2.580\, t$) تشریح گردیده است ، (t) وقت است به ثانیه ، قیمت Y را در صورتی دریافت كنید كه $t = 1.575$ sec باشد؟

۲٦ــ در یك سرکت برقی، ولتا ژ به رابطهٔ $V = 120 \cos 30 \pi t$ ارأیه گردیده است ۰ قیمت V را در صورتکه $t = 0.0125$ sec باشد دریافت کنید ؟

۲۷ــ آرمیچر یك داینمو به قطر 1.38 فت است ، و در یك دقیقه 1,200 دور میزند ۰ سرعت خطی یك نقطه بالای آرمیچر چند خواهد بود ؟

۲۸ــ تسمه (belt) ، یك پولی 38.5 cm طول دارد و در ظرف 2.5 ثانیه یك دور را تکمیل مینماید ۰ قطر پولی که این تسمه را دور میدیهد 11.0 cm بوده ، سرعت زاویه وی این پولی رااز قرار دور فی دقیقه دریافت کنید ؟

۲۹ــ مهتاب به اندازهٔ 249,000 میل از زمین فاصله دارد ۰ و تقریباً در ظرف 29 روز یك دوران مکمل را به اطراف زمین تکمیل می نماید ۰ پس سرعت زاویوی مهتاب را بدور زمین به واحد رادین فی ثانیه دریافت کنید ؟

۳۰ــ ریکارد یك گراموفون دارای قطر "6.915 است ودر ظرف یك دقیقه به اندازهٔ 45 دفعه دوران میکند ۰ سرعت خطی یك نقطه در حصهٔ لبه این ریکارد به واحد : فت فی ثانیه چند است ؟

۳۱ــ یك چرخ (توربین) (بادی) یك جنیریتور برقی که به ظرفیت 1,500 kw است توسط انرژی باد دور میخورد ۰ این توربین در یك دقیقه 40 دوران را تکمیل مینماید ۰ سرعت خطی یك نقطه بالای پرهٔ این توربین چند خواهد بود در صورتیکه طول پره از مرکز دوران 100 فت باشد ؟

۳۲ــ چرخ انجن پیشروی یك طیاره دارای قطر 2.44 m بوده و 2,200 دور فی دقیقه چرخ میزند ۰ سرعت خطی یك نقطه بالای پرهٔ چرخ چند است ؟

۳۳ــ یك سیکتور دأیره که زاویه مرکزی آن 210.75° درجه میباشد ، از یك ورق فلزی دأیروی که قطر آن 12.25 cm است ، قطع شده که ازین سیکتور یك ظرف مخروطی ساخته میشود ۰ شما مساحت جانبی مخروط مذکور را دریافت کنید ؟

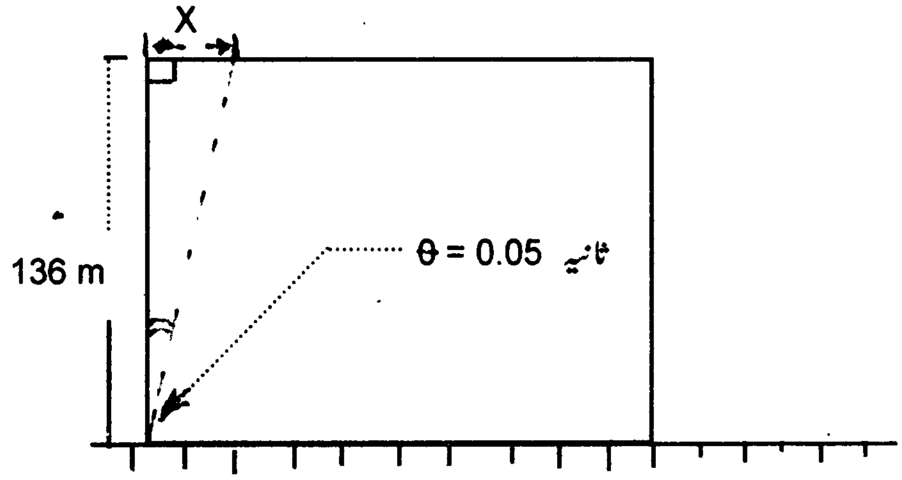
۳٤ــ یك خیمه به شکل مخروطی از پارچه تکهٔ دأیروی ساخته میشود ، اگر قطر این دأیره 15 ft وزاویهٔ مرکزی سیکتور قطع شده 120° درجه باشد ، مساحت پارچهٔ که در ساختن خیمه مصرف شده معلوم کنید ؟

۳۵ــ در ریاضیات بسیار عالی نشان داده میشود که جهت گرفتن قیمت های تقریبی تحت شرأیط بسیار خاص رابطهٔ ذیل بدست آمده میتواند : در صورتیکه زاویهٔ θ بسیار زیاد کوچك باشد ۰ رابطه ، ($\sin\theta = \tan\theta = \theta$) ۰

۳٦ــ با استفاده از رابطهٔ فوق ، tan 0.001 که زاویه به واحد درجه بوده باشد ، ارزیابی کرده و قیمت آنرا ذریعه کلکولیتر با هم مقایسه کنید ؟

۳۷ــ یك منجم یك ستاره که 12.5 سال نوری از او دورمیباشد ذریعهٔ تیلیسکوپ مشاهده میکند که در ظرف یك سال به سرعت زاویوی 0.2 ثانیه دوران میکند ۰ فرض کنید که ستارهٔ موصوف با لای خط مستقیم که عمود است به مسیر خط اولی مشاهده وی ، این ستاره چند میل حرکت کرده است ؟ (یك سال نوری ــ light year مساوی است به (5.88×10^{12} mile) ۰

۳۸ــ در شکل ذیل قیمت x را پیدا کنید (کمك ؛ فورمول $\sin\theta = \tan\theta = \theta$) ۰



سوالات فصل دوم

تمرین اول ـــ از سوالات (۱ الی ٤) توابع مثلثاتی زاویه داده شدهٔ θ در صورت دریافت کنید که ضلع نهأی زاویهٔ θ از نقاط ذیل عبور کند؟

1. $(6, 8)$ 2. $(-12, 5)$ 3. $(7, -2)$ 4. $(-2, -3)$

تمرین دوم ـــ از سوالات (٥ الی ٨) توابع مثلثاتی داده شده را از قرار توابع مثبت ، مگر به زاویهٔ حاده تشریح کنید؟

5. $\cos 132^\circ$, $\tan 194^\circ$, 6. $\sin 243^\circ$, $\cos 318^\circ$ 7. $\sin 289^\circ$, $\sec(-15^\circ)$

8. $\cos 103^\circ$, cac (-100°)

تمرین سوم ـــ از سوالات (۹ الی ۱۲) اندازه گیری های زاویه ها را ازقرار π تشریح ونشان بدیهید؟

9. 40° , 153° , 10. 22.5° , 324° 11. 48° , 202.5° 12. 27° , 162°

تمرین چارم ـــ از سوالات (۱۳ الی ۲۰) زاویه ها را به درجه تبدیل نمأید؟

13. $7\pi/5$, $13\pi/18$ 14. $3\pi/8$, $7\pi/20$, 15. $\pi/15$, $11\pi/6$

16. $17\pi/10$, $5\pi/4$ 17. 0.56 , 18. 1.354 19. 3.607 20. 14.5

تمرین پنجم ـــ از سوالات (۲۱ الی ۲۸) زاویه ها را به رادین تبدیل کنید؟

21. 100° 22. 305° 23. 20.25° 24. 148.38° 25. 262.05°

26. 18.72° 27. 136.2° 28. 385.4°

تمرین ششم ـــ از سوالات (۲۹ الی ٤٨) قیمت های توابع مثلثاتی داده شده را مستقیماً ذریعهٔ کلکولیتر دریافت نمأید؟

29. $\cos 245.50^\circ$ 30. $\sin 141.33^\circ$ 31. $\cot 295.07^\circ$ 32. $\tan 184^\circ$

33. $\csc 247.82^\circ$ 34. $\sec 96.17^\circ$ 35. $\sin 205.24^\circ$ 36. $\cos 326.72^\circ$

37. $\tan 301.41^\circ$ 38. $\sin 103.96^\circ$ 39. $\tan 256.42^\circ$ 40. $\cos 162.32^\circ$

41. $\sin 9\pi/5$ 42. sec 5π / ٤ 43. $\cos 7\pi/6$ 44. $\tan 23\pi/12$

45. $\sin 0.5906$ 46. $\tan 0.8035$ 47. $\csc 2.153$ 48. $\cot 5.190$

تمرین هفتم ـــ از سوالات (٤٩ الی ٥٢) زاویهٔ θ را تا به نزدیکترین 0.01 درجه ذریعهٔ کلکولیتر دریافت کنید در صورتیکه $0 \le \theta < 360^\circ$ باشد .

49. $\tan\theta = 0.1817$ 50. $\sin\theta = -0.9323$ 51. $\cos\theta = -0.4730$

52. $\cot\theta = 1.196$

تمرین هشتم ـــ از سوال (٥٣ الی ٥٦) قیمت θ را ذریعهٔ کلکولیتر در صورتیکه حدود : $2\pi \ge \theta \ge 0^\circ$ باشد ، پیدا کنید؟

53. $\cos\theta = 0.8387$ 54. $\sin\theta = 0.1045$ 55. $\sin\theta = -0.8650$

56. $\tan\theta = 2.840$

تمرین نهم ـــ از سوال (٥٧ الی ٦٠) زاویهٔ θ را تا به نزدیکترین قیمت 0.01° را در حدود $0^\circ < \theta < 360^\circ$ پیدا کنید؟

57. $\cos\theta = -0.7222$, $\sin\theta < 0$ 58. $\tan\theta = -1.683$, $\cos\theta < 0$

59. $\cot\theta = 0.4291$, $\cos\theta < 0$ 60. $\sin\theta = 0.2626$, $\tan\theta < 0$

٦١ ـــ ولتاژ در یك سرکت برق A C به فورمول ذیل نشان داده شده است . $v = V\cos 25t$

که درین معادله ، V ولتاژ اعظمی و t وقت است به ثانیه . $V = 150\,v$, $t = 0.1$ sec $v = ?$

۶۲ــــ معادلهٔ تغیر مکان یك زره که به سرعت سادهٔ هارمونیك بی جاه میشود عبارت است از $d = A \sin 5t$ که درین معادله A عبارت است از فاصله تغیر مکان اعظمی در وقت t ۰ قیمت d را در صورت پیدا کنید که : $t = 0.460$ sec, $A = 16$ cm

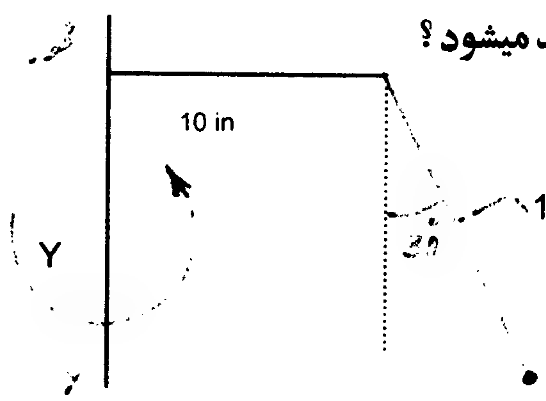
۶۳ــــ طول تار یك رقاص (pendulum) 5.375 فت است و در زاویهٔ $\theta = 4.575$ درجه تال میخورد ۰ فاصلهٔ که این رقاصه از یك انجام تابه انجام آخر دیگر تال میخورد معلوم کنید ؟

۶۴ــــ دو عدد پولی بالترتیب ، دارای شعاع 10 in و 6 in بوده که مراکز آنها به اندازهٔ 40 in از هم دیگر دور واقع اند ۰ اگر تسمهٔ (belt) مشترك آنها مطابق علامهٔ X وصل نشده باشد ، طول تسمه را دریافت کنید ؟

۶۵ــــ یك توته کاغذ فلتر دأیروی دارای قطر 15 cm طوری قات شده است که مساحت مؤثر فلتری آن معادل یك سیکتور است که اززاویهٔ مرکزی 220° ساخته شده است . مساحت فلتری این کاغذ چند است ؟

۶۶ــــ یك عدد قیف ازپارچهٔ دأیروی که شعاع آن 10 in است ساخته میشود ، و در عین زمان از همین پارچهٔ دأیروی اولی دو پارچه دیگر نیز قطع شده است .که یکی آن بشکل دأیره با شعاع یك اینچ از حصهٔ مرکزی پارچهٔ اصلی و دیگری بشکل سیکتور به احتوا زاویهٔ مرکزی 220° درجه میباشد ۰ مساحت سطحی قیف را دریافت کنید ؟

۶۷ــــ پرزه جات که در شکل (۲۰ ــ ۲) نشان داده شده است ، اگر به دور محور Y به سرعت ۲ دور فی ثا نیه دوران کند سرعت خطی اعظمی ساچمهٔ که در شکل نشان داده شده است چند میشود ؟



۶۸ــــ یك ماشین خرادی ، یك توته کار فلزی را به سرعت 350 فت در فی دقیقه قطع میکند ۰ شعاع آن توتهٔ کار استوانیه ای که به سرعت 120 دور در فی دقیقه دوران داده میشو د ، دریافت کنید ؟

۶۹ــــ یك میزان الحرارهٔ دارای سکل دأیروی داریم ۰ عقربهٔ این میزان الحراره برای تعیر درجه حرارت 40° درجه ، مقدار 55.25° درجه زاویه مرکزی را طی کرده است (انحراف کرده) ۰ اگر طول این عقربه 5.25 cm باشد ، مقدار طول سکل دأیروی را برای تغیر درجه اعظمی 150° درجهٔ ثانتیگرید چند خواهد بود ؟

۷۰ــــ عموماً ، در یك حالت خاص ، یك الیکترون در یك ساحهٔ مقناطیسی به مسیر دأیروی در حال حرکت میباشد ۰ اگر این الیکترون به سرعت خطی 20,000 m / sec به یك مسیر دأیروی که شعاع این دأیره 0.5 m میباشد حرکت بکند ۰ این الیکترون در ظرف 0.1 ثانیه چقدر فاصله را طی میکند ؟

۷۱ــــ یك کم شفت موتر طوری ساخته شده است که یك حصهٔ آن بشکل سیکتور در محتوا زاویهٔ مرکزی 72.5 درجه که شعاع این قوس 5.315 " میباشد ۰ طول قوس این کم شفت را دریافت نمأید ؟

۷۲ــــ یك نل آب افقی دارای شعاع 6 ft است ۰ اگر عمق آب که در نل موصوف جریان میکند 3 ft بوده باشد ، چند فیصد نل پر از آب میباشد ؟

۷۳ــــ یك پرهٔ پکه برقی که دارای شعاع 15 cm به سرعت 900 دور در فی دقیقه دور میخورد ۰ سرعت خطی یك نقطهٔ در اخیر پره چند میشود ؟

۷۴ــــ پل یك ارهٔ بشکل دأیروی دارای قطر 8.20 in ، و در یك دقیقه 1,500 دور میخورد ۰ سرعت خطی یك نقطه در اخیر یکی از دندانهٔ اره چند است ؟

۷۵ــــ یك بیم (شکل مخروطی) شعاع لیزر به عرض 0.0008° درجه از منبع نور نشت کرده است٠ و بالای هدف خود در فاصلهٔ دور یك روشنی دأیروی دارای شعاع 2.5 km انداخته است٠ این هدف ازمنبع نور لیزر چقدر دورتر واقع است ؟

۷٦ــــ سیارهٔ وینوس در وقت مشاهده از سطح زمین به زاویهٔ 15 ثانیه احتوا میشود ٠ اگر فاصلهٔ بین زمین و سیارهٔ وینوس 1.04×10^{8} mi میل باشد ٠ قطر سیارهٔ وینوس چند است ؟

فصل سوم

ویکتور ها و مثلث های کیفی

طوریکه میدانیم ، در هر رشته تخنیك قبل از عملی کردن تیکنا لوژی به یك سلسله محاسبات ، برآورد ها ، دیزاین ها و پلان گذاری ها ضرورت احساس میشود ٠

در همچو محاسبات ، لازم است که از قوانین وطرح های فزیك از طریق علم مثلثات وریاضیات محاسبات صورت بگیرد ٠

در اکثریه محاسبات فزیکی از مفهوم ویکتور (vector) استفاده میشود٠ و ویکتور یك سیمبول قبول شدهٔ ریاضی است که مقادیر ویکتوری علم فزیك را نماینده گی میکند٠ در علم فزیك بعضی از مقادیر مانند : قوه ، سرعت ، مومینتم ، ولتاژ و جریان برق که در تحلیل ها : هر دو ، مقدار و جهت آنها قابل اهمیت اند به ویکتور ها نشان داده میشوند ٠

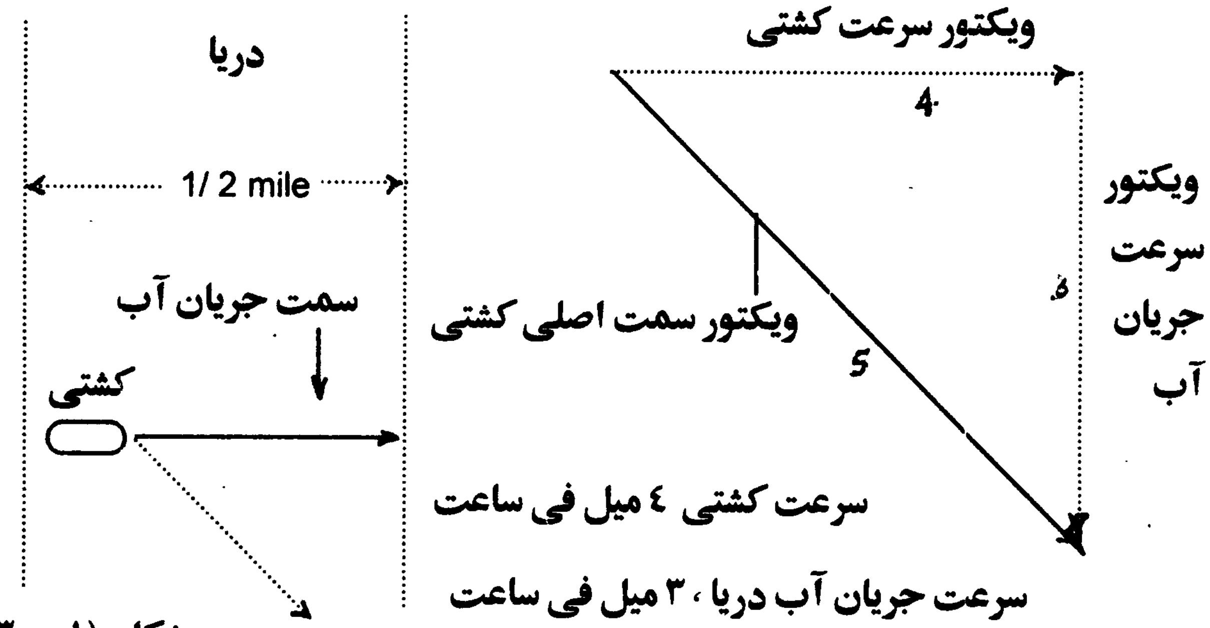
جهت جمع کردن و یا منفی کردن ویکتور ها لازم است تا از طریق علم مثلثات مفاهیم ورابطه های اضلاع و زاویه های مثلث های کیفی استفاده بعمل آید٠

بطور مثال : اگر گفته میشود که یك طیاره جت در هوا به تیزی (speed) برابر 600 میل در یك ساعت پروازمیکند ٠ یا بگویم ما از کابل به قندهار به تیزی (speed) 80 کیلو میتر فی ساعت در موتر رفتار نمودیم ٠ این مفاهیم در علم فزیك طوری تحلیل میشود که از حرکت های طیاره و موتر صرف مفاهیم تیزی آنها هدف است ٠ لهذا ، به این نتیجه میرسیم که مفهوم تیزی (speed) از نقطهٔ نظر علم فزیك یك مقدار : سکالری (Scaler) بوده که صرف مقدار آن قابل اهمیت است ٠
حال ، اگر در معلومات خود علاوه نمأیم که طیارهٔ جت به سرعت (Velocity) 600 میل در فی ساعت به سمت 10° درجه شمال شرق پرواز میکند ، این معلومات صرف وصرف به سیمبول ویکتور نشان داده میشود که عبارت از سرعت است ٠ پس ، (سرعت) در علم فزیك یك کمیت **ویکتوری (vector)** است که مرام از معلومات ، هر دو : مقدار وسمت حرکت (جهت) آن قابل اهمیت میباشند ٠ در نتیجه، معلومات تیزی (speed) یك کمیت سکالر بوده در حالیکه، سرعت (velocity) یك کمیت ویکتوری میباشد ٠

حال ، میخوا هیم عملاً مفهوم عملی دو ویکتور را تحت بحث قرار بدیهیم :

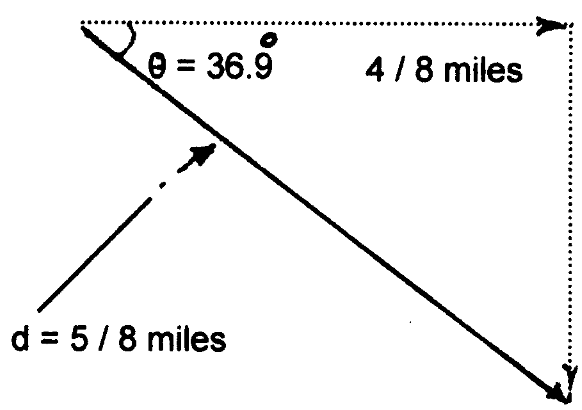
مثال : یك کشتی ذریعهٔ انجن خود در آب استاده به سرعت 4 میل در فی ساعت به جهت معین حرکت کرده میتواند ، در حالیکه همین کشتی در یك دریا که سرعت آب آن 3 میل در فی ساعت بوده در حرکت آورده شود ٠ درین وقت ملاحظه میشود که سرعت کشتی موصوف تحت تأثیر سرعت آب دریا آمده که در نتیجه : کشتی به یك سمت جدیدالتغیر حرکت خوا هد کرد ٠ حال اگر کشتی همسمت جریان آب حرکت کند ، سرعت کشتی موصوف زیاد گردیده به 7 میل درفی ساعت میرسد ٠ و اگر کشتی مخالف جریان آب دریا حرکت بکند ، این کشتی نمیتواند بیشتر از یك 1 میل در فی ساعت حرکت بکند٠ و همچنان ، اگر این کشتی خواسته باشد راساً به عرض از دریا عبور بکند ، میدانیم که جریان آب دریا ممانعت کرده ، کشتی حتماً به سمت پأین تر از مسیر مستقیم عبور خوا هد نمود ٠ زیرا جریان آب دریا کشتی را پأین میبرد ٠ حل همچو مسأیل را صرف و صرف میتوان از طریق عملیهٔ جمع کردن و یا تفریق کردن ویکتور ها امکان پذیر میباشد ٠

فرض کنید که عرض دریا در مثال فوق 1/2 mile بوده باشد · پس کشتی هذا میتواند از دریا در ظرف 1 / 8 ساعت به اندازهٔ 3 / 8 میل پآینتر از خط مستقیم روبرو عبور بکند · حل این مثال در شکل (۱ ـــ ۳) ملاحظه شده میتواند·



شکل (۱ ـــ ۳)

از شکل فوق مشاهده میشود که کشتی موصوف به مسیر وتر مثلث قایم الزاویه که اضلاع آن 4 واحد و 3 واحد میشوند حرکت می نمأید · وقت کشتی 1 / 8 حصهٔ یك ساعت میشود · پس اگر ما مثلث قا یم الزاویه را نظر به فاصله ها را رسم کنیم چنین شکل متنا سب بدست می آید ·



$$d = \frac{d}{t} = \frac{5/8}{1/8} = \frac{5}{8} \times \frac{8}{1} = 5 \text{ mi/h}$$

$$d^2 = \left(\frac{4}{8}\right)^2 + \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \left(\frac{16+9}{64}\right) = \left(\frac{25}{64}\right), \; d = \frac{5}{8} \text{ miles}$$

$$\tan\theta = \frac{3/8}{1/2} \qquad \theta = \tan^{-1}(3/4) = \tan^{-1}(0.75), \quad \theta = 36.9^{\circ}$$

در مثال فوق الذ کر ، ملا حظه میشود که با حرکت کشتی در آب جاری دریا ، هر دو : سرعت کشتی و هم سمت حرکت کشتی تغیر پذیرفت · از شکل و تحلیل های فوق بطوری خلاصه نتیجه میگیریم که در حقیقت ما دو ویکتور را به اساس قوانین ریاضی جمع کردیم · ویکتور ها عموماً به حرف A و یا B که بسیار تیره میباشد نشان داده میشوند · ویا در اکثر کتب و یا دانشمندان فزیك در وقت نوشتن بالای حرف $\vec{A}$ و یا $\vec{B}$ علامهٔ ویکتور نشانی میکند مانند :

$\vec{A}$ و $\vec{B}$ و $\vec{C}$ ...

﴿ جمع ویکتور ها ﴾

ویکتور ها که عموماً مقادیر فزیکی را با کمیت و سمت نشان میدهد ، به سه طریقه با هم جمع میشوند :

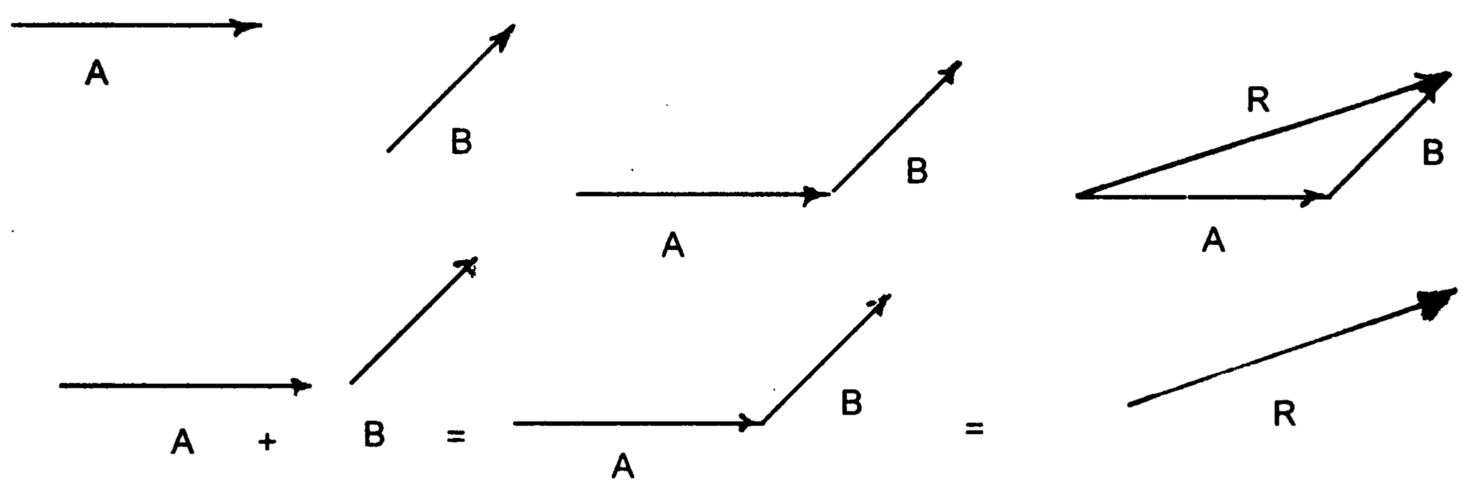
۱ ـــ طریقه د ایگرام (رسم کردن ویکتور ها ذریعه اندازه گیریی ـ سکل ـ دقیق)۰

۲ـــ طریقهٔ متوازی الاضلاع ۰

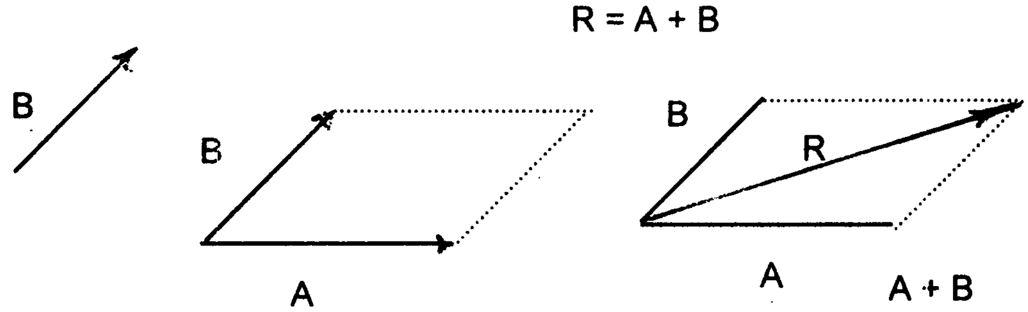
۳ ـــ طریقهٔ قوانین مثلثاتی ۰

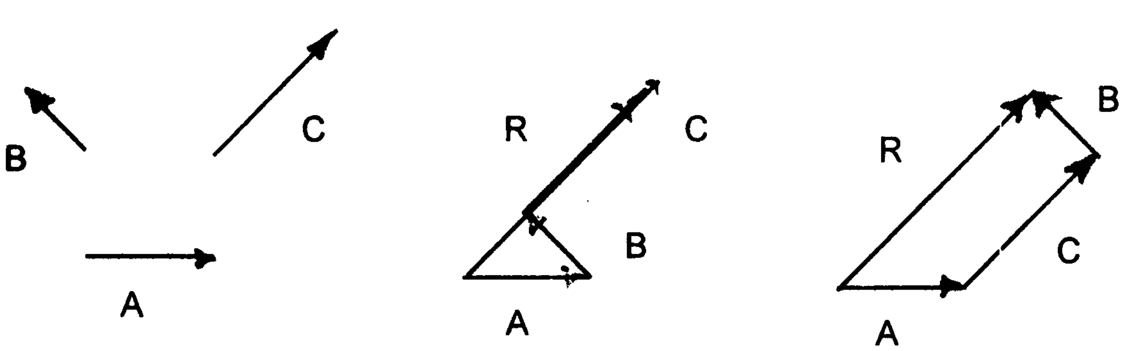
هنگامیکه دو و یا چندین ویکتور را با هم جمع میکنیم ۰ آخر ویکتور اولی را به شروع ویکتور دومی بدون تغیر سمت و طول آن وصل نموده ، و بعداً آ خر ویکتور دومی را به شروع ویکتور سومی ، سپس آخر ویکتور سومی را به شروع ویکتور چارمی ----- به همین ترتیب با هم دیگر اتصال مینمأیم ۰ در اخیر ، شروع ویکتور اولی را به آخر ویکتور نهأی اتصال مینمأیم که در نتیجه همین ویکتور نهأی عبارت از ویکتور محصلهٔ (مجموعه) تمام ویکتور های مطلوب است ۰ که در نتیجه : طول محصله (مجموعه کل) مجموع مقادیر تمام وویکتور ها را نشان میدهد۰ سمت همین ویکتور نهأی ، عبارت از سمت (جهت) مؤ ثر تمام ویکتور ها را نشان میدهد ۰

جهت تحلیل خوبتر موضوع ، اشکال ذیل را به غور و دقت تام مطالعه فرمأید.(شکل ٤ ـــ ۳)



$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$



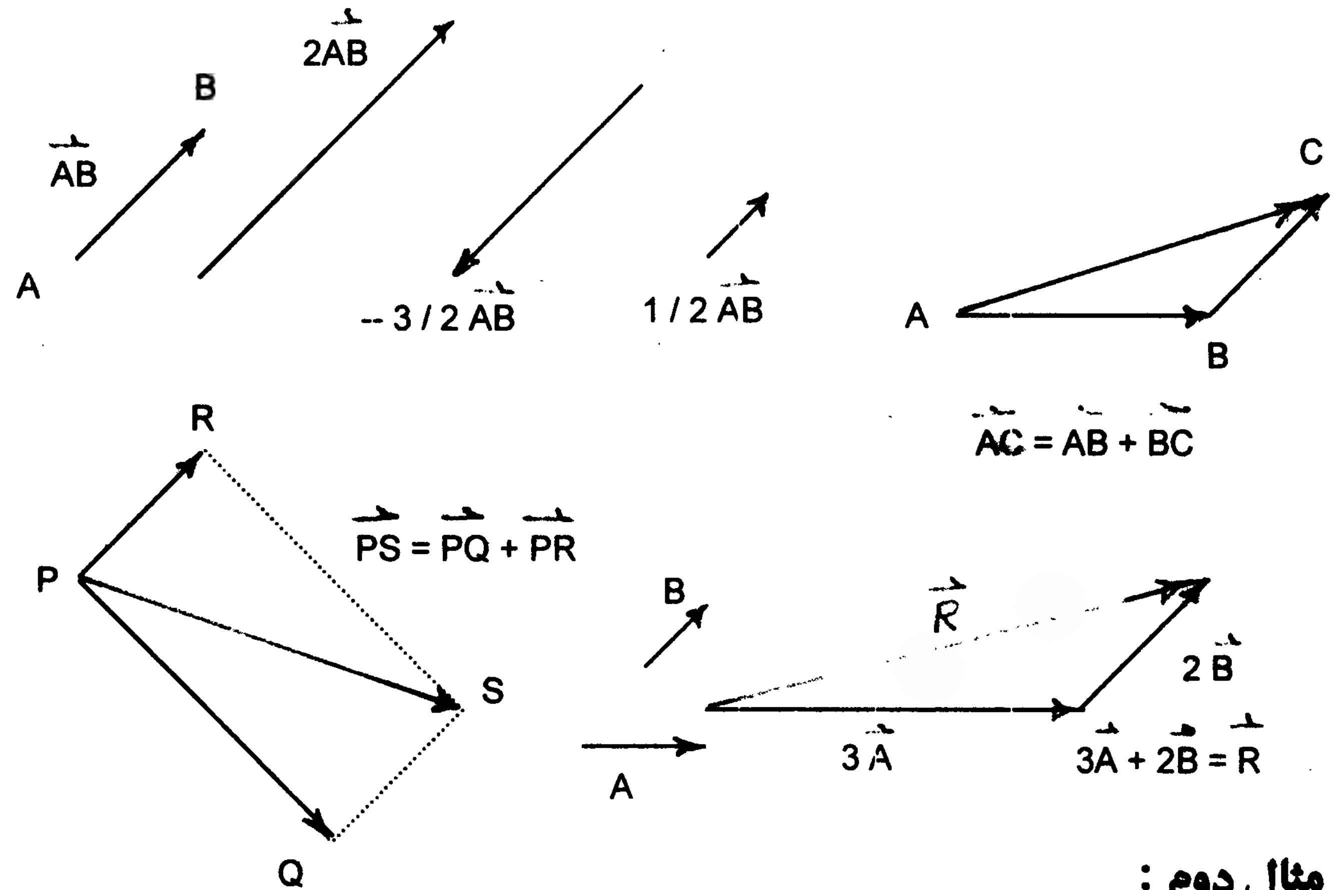


$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$

شکل (٤ ـــ ۳)

ادامهٔ جمع ویکتور ها :

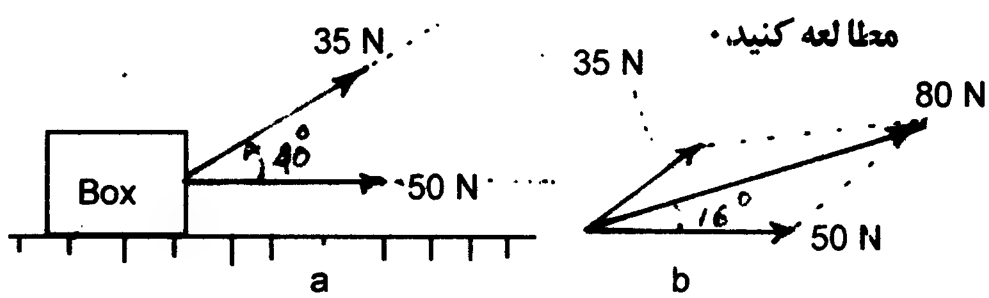
در شکل (۳ــــ۳) مثالهای جمع ویکتور ها بیشتر تشریح شده است ،



مثال دوم :

دوریسمان به یك بكس طوری بسته گردیده است که یکی آن به قوهٔ 50 N ، بکس را به خط افقی می کشاند ۰ وریسمان دومی همین بکس را به قوهٔ 35 N به زاویهٔ 40° درجه بطرف بالا کش میکند ۰ محصلهٔ این دوقوه و سمت حرکت بکس را محاسبه نمأید

حل : شکل (٥ــ۳) را مطالعه کنید۰

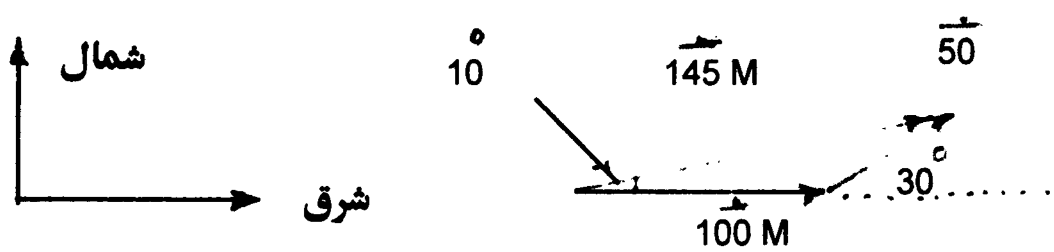


شکل (٥ــ۳)

حل نخست در شکل (a 5 ---3) ویکتور هر قوه را مطابق یك سكل مشخص رسم مینمأیم بعداً ویکتور ها را بدون تغیر طول وتغیر جهت آن در شکل b انتقال میدیهیم ۰ سپس با تکمیل کردن طریقهٔ دائگرام ، دیده میشود که محصلهٔ هر دو قوه مساوی به 80 N بزاویهٔ 16° درجه از خط افقی یا محور X بالاتر عمل میکند ۰

مثال سوم : یك طیاره جت به فاصلهٔ 100 Mile به سمت شرق حرکت میکند وبعداًبطرف شمال از شرق بزاویهٔ 30 درجه دور میخورد که به فاصلهٔ 50 Mile به همین مسیر به سفر خویش ادامه مید یهد ۰ شما معلوم کنید که طیارهٔ موصوف از محل اولی خود چقدر میل فاصله بیجاه شده است ؟

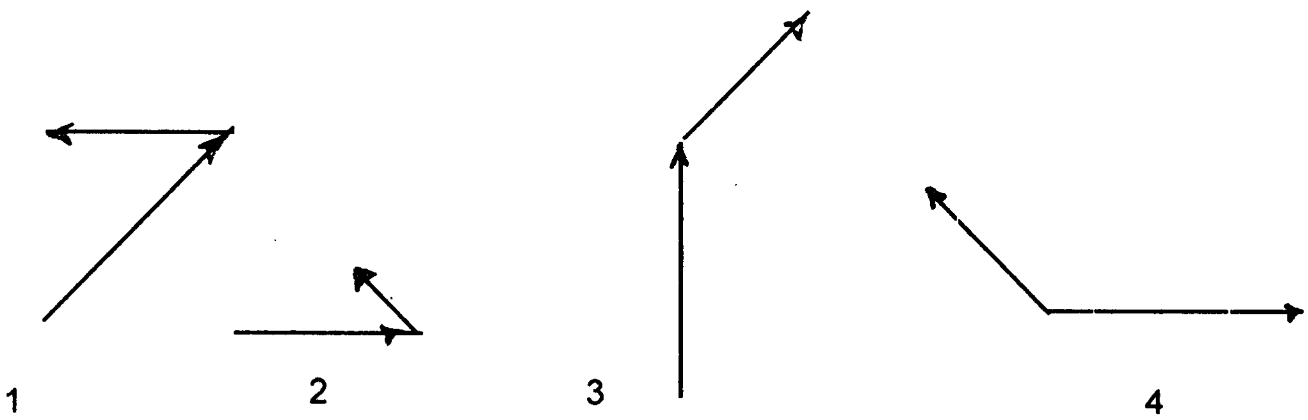
حل : در شکل (٦ــــ۳) ، هر دو ویکتور را به سکل با دقت طوری رسم نمأید که زاویهٔ 30° را توسط نقاله دقیقاً رسم کنید ۰ بعداً نتجه را نیز با سکل حساس رسم کنید ، در نتیجه دیده میشود که محصلهٔ آن 145 mile اندازه گیری میشود ۰



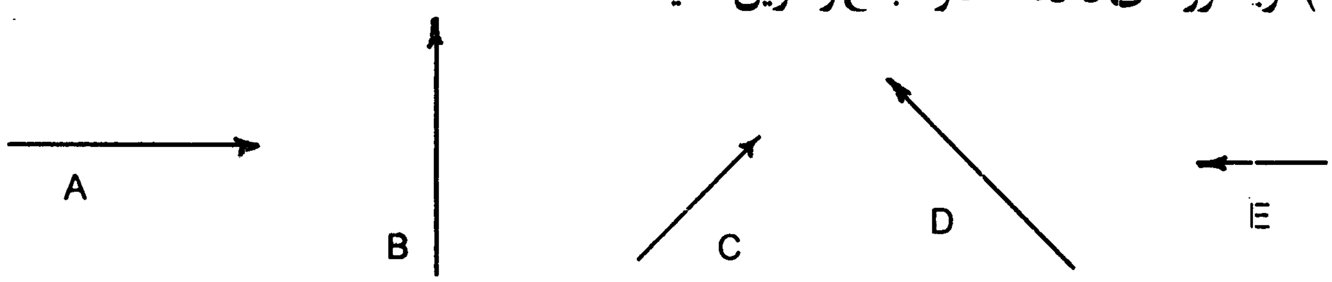
شکل (٦ــــ۳)

﴿ تمرین فصل سوم ﴾

از سوال (۱ الی ۴) ویکتورهای ذیل را به طریقهٔ متوازی الاضلاع جمع کنید ؟



از تمرین (۵ الی ۲۴) ، ویکتورهای داده شده را جمع و تفریق نمأید ؟



5.	A + B	6.	B + C	7.	C + D	8.	D + E
9.	A+ C+E	10	B+D+A	11.	A+D+E	12.	B+E+C
13.	B + 3E	14.	A + 2C	13.	B + 3E	14.	A+2C
15.	3C+E	16.	2C+D	17.	A -- B	18.	C - D
19.	E -- B	20.	D -- A	21.	3B -- 2D	22.	2A -- 3E
	23	B+2C -- E	24.	A+4E -- 3B			

۲۵ ـــ بالای یك بولت قوهٔ 10 lb عموداً بطرف بالا عمل کرده است ، و قوهٔ دوم که 2 lb میشود بطرف راست بالای همین بولت عمل میکند ، مجموع (محصلهٔ) هر دو قوه را دریافت کنید ؟

۲۶ ـــ بالای انجام یك میله (Beam) قوهٔ 40 N عموداً بطرف بالا عمل کرده است ، و همچنان قوهٔ 70 N بطرف پأین بزاویهٔ 45° درجه پأینتر از سطح افقی بالای آن عمل میکند ، شما محصلهٔ هر دو قوه را دریافت کنید ؟

۲۷ ـــ یك فوقانه که از غاز هیلیم پر شده بطرف بالا به سرعت 6 ft /sec عموداً بطرف بالا حرکت میکند ، باد هم به سمت افقی به سرعت 20 ft /sec می وزد ، محصلهٔ این قوه ها را بالای فوقانه دریافت کنید ؟

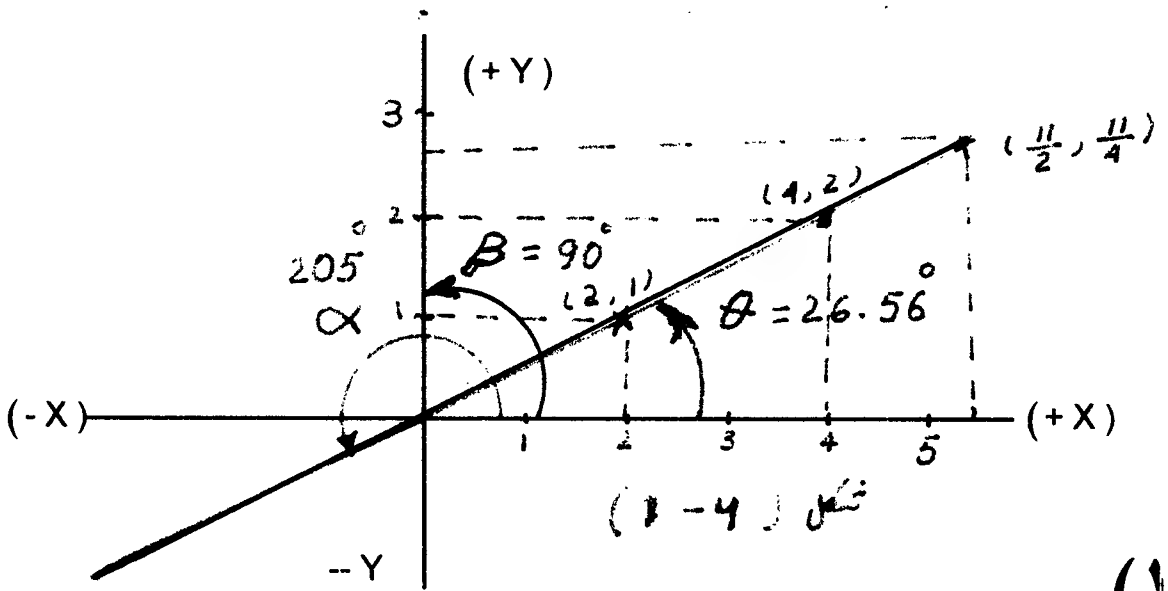
۲۸ ـــ یك طیاره خورد در هوا استاده (بدون باد وشمال) به سرعت 120 mile / hr. سفر میکند ، این طیاره میخوا هد که به طرف جنوب در حالکه باد بسرعت 30 mi / hr. از طرف شمال شرق می وزد به پرواز خود ادامه مید هد ، سرعت این طیاره وسمت حرکت آنرا دریافت نمأید؟

۲۹ ـــ یك نفر از خانهٔ خود به فاصلهٔ 8 mile به سمت شمال غرب بالای یك سرك مستقیم حرکت میکند ، وبعداً به یك سرك مستقیم به سمت شمال به فاصلهٔ 10 mile اضافه حرکت میکند ، پیدا کنید که این شخص به کدام فاصله از خانهٔ خود تغیر مکان نموده است ؟

۳۰ ـــ یك کشتی به فاصلهٔ 20 km. بزاویهٔ 30° درجه جنوب از شرق سفر میکند ، و بعداً بطرف جنوب به فاصلهٔ 40 km. به سفر خویش ادامه میدهد ، فاصلهٔ تغیر مکان کشتی نظر به نقطهٔ اولی آن چند کیلو متر میشود ؟

مثال سوم : میخواهیم زاویهٔ 205° را که زاویهٔ ربع سوم است ، رسم کنیم؟

حل : برای آنکه زاویهٔ مورد نظر ، در حالت ستندرد بوده باشد ، از سمت مثبت محور (X) شروع کرده ، زاویهٔ را رسم میکنیم که (205°) باشد ، (البته ، از نقاله استفاده می نمائیم) ۰ مثلاً زاویهٔ (α) در شکل (٦ــ ١) ۰ زاویه (α) به حالت ستندرد است ، زیرا رأس آن در مبدأ (O) واقع گردیده است ۰ همچنان در همین شکل بوضا حت مشاهده میشود که زاویهٔ (θ) نیز به حالت ستندرد است زیرا ، ضلع دومی آن از نقا ط : (1 , 2) , (2 , 4) , (11/4 , 11/2) که بالای یك خط مستقیم موقیعت دارد ، عبور میکند ۰ زاویهٔ (β) در همین شکل یك زاویهٔ ربعی است ، زیرا ضلع دوم آن با لای محور (Y) منطبق میباشد ۰



شکل (٦ ــ ١)

تمرینات (١ــ ١)

زاویه های مربوط به تمرین های (١ الی ٤) را رسم کنید؟

1.	60° , $+90^\circ$, 120°	2.	330° , -150° , 450°
3.	50° , -360° , -30°	4.	45° , 250° , -250°

در تمرین های (٥ الی ١٢) ، برای هر زاویه ذکر شده یك زاویهٔ کو ترمینلِ مثبت و یك زاویهٔ کو ترمینلِ منفی را رسم کنید؟

5.	45°	6.	73°	7.	150°
8.	162°	9.	$70^\circ 30'$	10.	$153^\circ 47'$
11.	278.1°	12.	197.6°		

زاویهٔ های که در تمرینات (١٣ الی ١٦) به ریدین (radian) ار أیه شده اند ، آنها را به درجه تبدیل نمائید؟

13.	0.265 rad.	14.	0.838 rad.
15.	1.447 rad.	16.	3.642 rad.

زاویهٔ های مربوط به تمرینات (١٧ الی ٢٤) را به سیستم اعشا ری تبدیل نمائید ؟

17.	$15^\circ 12'$	18.	$246^\circ 48'$	19.	$86^\circ 3'$
20	$157^\circ 39'$	21	$301^\circ 16'$	22.	$4^\circ 47'$
23.	$96^\circ 8'$	24.	$38^\circ 28'$		

در تمرینات (٢٥ الی ٣٢) زاویه های را که به سیستم اعشاری نشان داده شده ، به دقیقه و ثا نیه تبدیل کنید؟

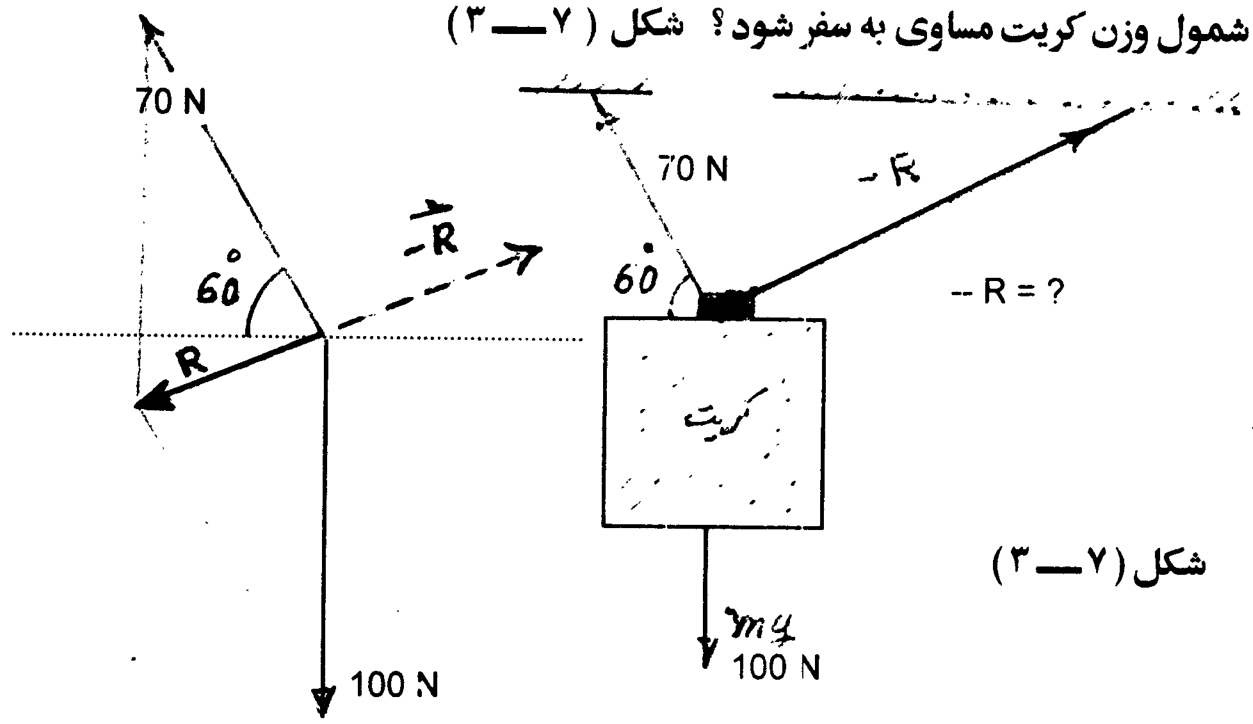
25.	47.5°	26.	215.8°	27.	19.75°	28.	84.55°
29.	5.62°	30.	238.21°	31.	24.92°	32.	142.87°

در تمرینات (٣٣ الی ٤٠) زاویه های را که در حالت ستندرد می باشد واز نقاط ذیل عبور میکنند رسم نمائید ؟

33.	(4 , 2)	34.	(-3 , 8)	35.	(- 3 , -5)	36.	(6 , - 1)
37.	(-7 , 5)	38.	(-4 , -2)	39.	(2 , -5)	40.	(1 , 6)

۳۱ــــ سه قوه باالترتیب ، با لای یك حلقه خورد در فضا عمل میکنند ۰ قوهٔ 70 N عموداً بطرف پأین ، قوهٔ 15 N افقی بطرف راست وقوهٔ 25 N بزاویهٔ 53 درجه بالاتر از سطح افقی بطرف چپ عمل میکنند۰ محصلهٔ قوه ها را بالای این حلقه دریافت کنید ؟

۳۲ــــ یك کریت که وزن آن 100 N است ، ازدو ریسمان آویزان گردیده است ۰ در یك ریسمان قوهٔ 70 N که به سمت چپ بزاویهٔ 60 درجه با لاتر از افقی عمل میکند ۰ قوهٔ دومی را در ریسمان دوم در صورت دریافت کنید که محصلهٔ تمام قوه ها با شمول وزن کریت مساوی به سفر شود ؟ شکل (۷ــــ ۳)



شکل (۷ــــ ۳)

« مرکبات (اجزأ) ویکتور ها »

جمع ویکتور ها بطریقهٔ (شکل متوازی الاضلاع) و دایگرامها طریقه ها ی هندسی میباشند که میتوان محصلهٔ تقریبی چندین ویکتور ها را بدست بیاوریم ۰ ولی باید گفت ، اگر درآن دقت تام نشود و وسأیل خطکش ، نقاله ، سکل و دیگر لوازم رسم تخنیکی حساس نداشته باشیم ، مشکل است تا قیمت حقیقی محصله را از طریق رسم کردن به دست بیا وریم ۰

چون در اکثریه محاسبات انجینری جوابات دقیق محاسبوی بسیار ضروری است تا در ترح کدام پروژهٔ تخنیکی مشکلات ایجاد نشود، لذا لازم می افتد تا محاسبات را بطریقهٔ بسیار حساس و دقیق به پیش ببریم ۰

درین بخش درس خویش ، ما راجع به مرکبات (اجزأ) ـ components بحث مینمأیم ۰

اجزأ ویکتور : (component of the original vector)

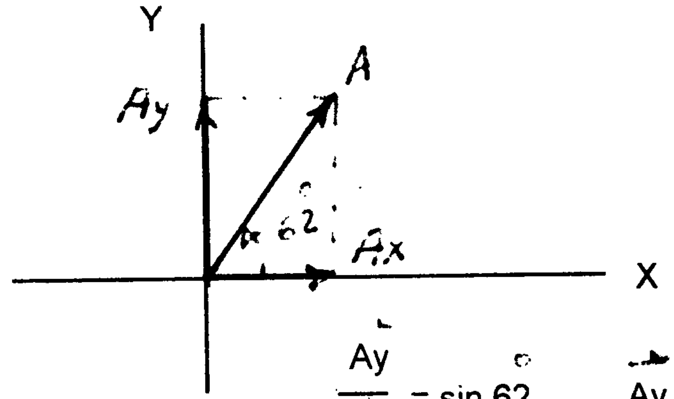
دو ویکتور که باهم جمع شوند و ویکتور سومی (محصله) را بدست بیاوریم ، میگؤییم در حقیقت، این دو ویکتور ، در حقیقت مرکبات (اجزأ ـ components) ویکتور محصله اند ۰ مثلاً : در مثال قبلی کشتی که از دریا عبور میکرد گفته میتوانیم که ویکتور های 4 mile / hr و 3 mile / hr عبارت از اجزأ ویکتور 5 mile / hr میباشند ۰

در کا ر های عملی و تطبیق انجینری این موضوع بسیار مهم است که باید اجزأ یك ویکتور (محصله) باید در یك کواردینیت سیستم (coordinate system) یعنی محور های (X) و (Y) طوری جابجا شوند که شروع ویکتور عمده در تقاطع محور های (X) و (Y) یا به عبارهٔ دیگر در مبدأ (0) قرار بگیرد و بعداً اجزأ (مرکبات) همین ویکتور به امتداد محور (X) و

محور (Y) رسم شوند ۰ عملیهٔ دریافت کردن اجزأ یك ویکتور را بالای محور های (X) و (Y) را بنام عملیهٔ تجزیهٔ ویکتور ها یاد میکنند۰ در مثال ذیل توجه کنید :

مثا ل اول : در شکل ذیل مرکبات ویکتور $\vec{A}$ را در صورت دریافت کنید که کمیت ویکتور $\vec{A}$ مساوی 7.25 lb باشد ؟

حل:



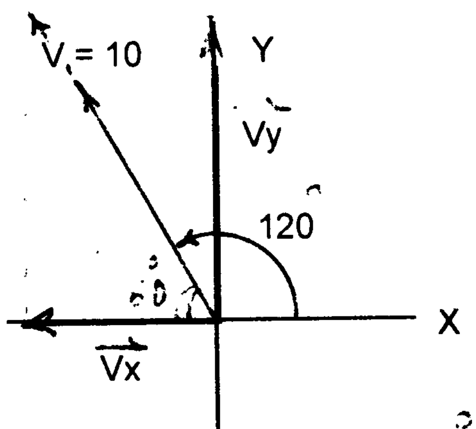
$$\frac{\vec{A}x}{\vec{A}} = \cos 62^\circ$$

$$\vec{A}x = \vec{A}\cos 62^\circ$$

$$\frac{\vec{A}y}{\vec{A}} = \sin 62^\circ \qquad \vec{A}y = A\sin 62^\circ \qquad \vec{A} = 7.25\ lb$$

$$\vec{A}x = 7.25\ lb \times \cos 62^\circ = 3.40\ lb \qquad \vec{A}y = 7.25\ lb \times \sin 62^\circ = 6.40\ lb$$

مثال دوم: یك ویکتور $\vec{V}$ که 10 واحد است وبه زاویهٔ 120° درجه از محور X عمل میکند . این ویکتور را به مرکبات اش $\vec{V}x$ و $\vec{V}y$ تجزیه کنید؟

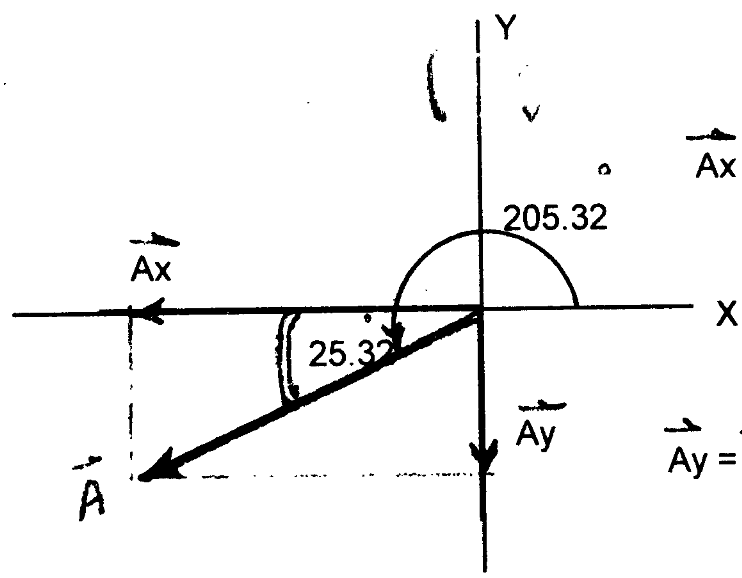


$$\vec{V}x = V\cos 120^\circ = -V\cos 60^\circ$$

$$\vec{V}x = -10\,(0.5) = -5.0\ \text{واحد}$$

$$\vec{V}y = V\sin 120^\circ = V\sin 60^\circ \qquad \vec{V}y = 10\,(0.866) = 8.66\ \text{واحد}$$

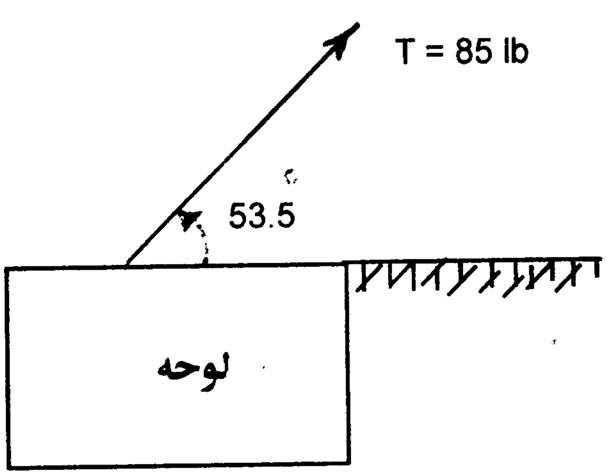
مثال سوم: یك ویکتور A که قیمت آن 375.4 واحد بوده و بزاویهٔ $(\theta = 205.32^\circ)$ از محور X عمل میکند . این ویکتور را به دومرکبه $\vec{A}x$ و $\vec{A}y$ تجزیه کنید؟

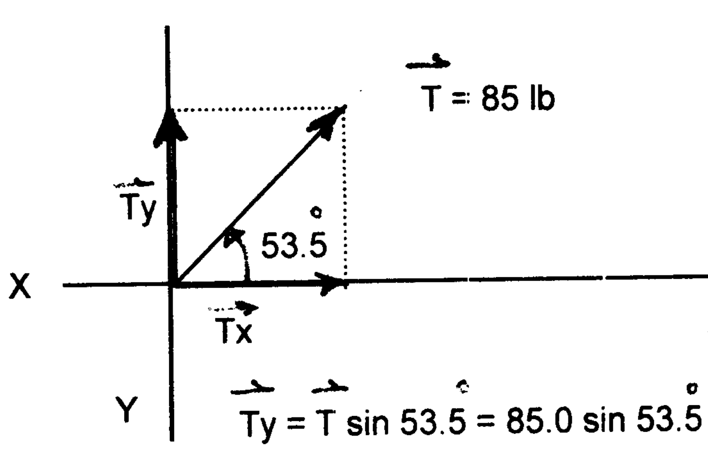


$$\vec{A}x = \vec{A}\cos 205.32^\circ = 375.4\cos 205.32^\circ = -339.3\ \text{واحد}$$

$$\vec{A}y = \vec{A}\sin 205.32^\circ = 375.4\sin 205.32^\circ = -160.5\ \text{واحد}$$

مثال چارم: مقدار قوهٔ کشش در یك کیبل که یك لوحه دکان را آویزان نگهمیدارد 85.0 lb است . مرکبات عمودی وافقی این قوه را دریافت کنید؟

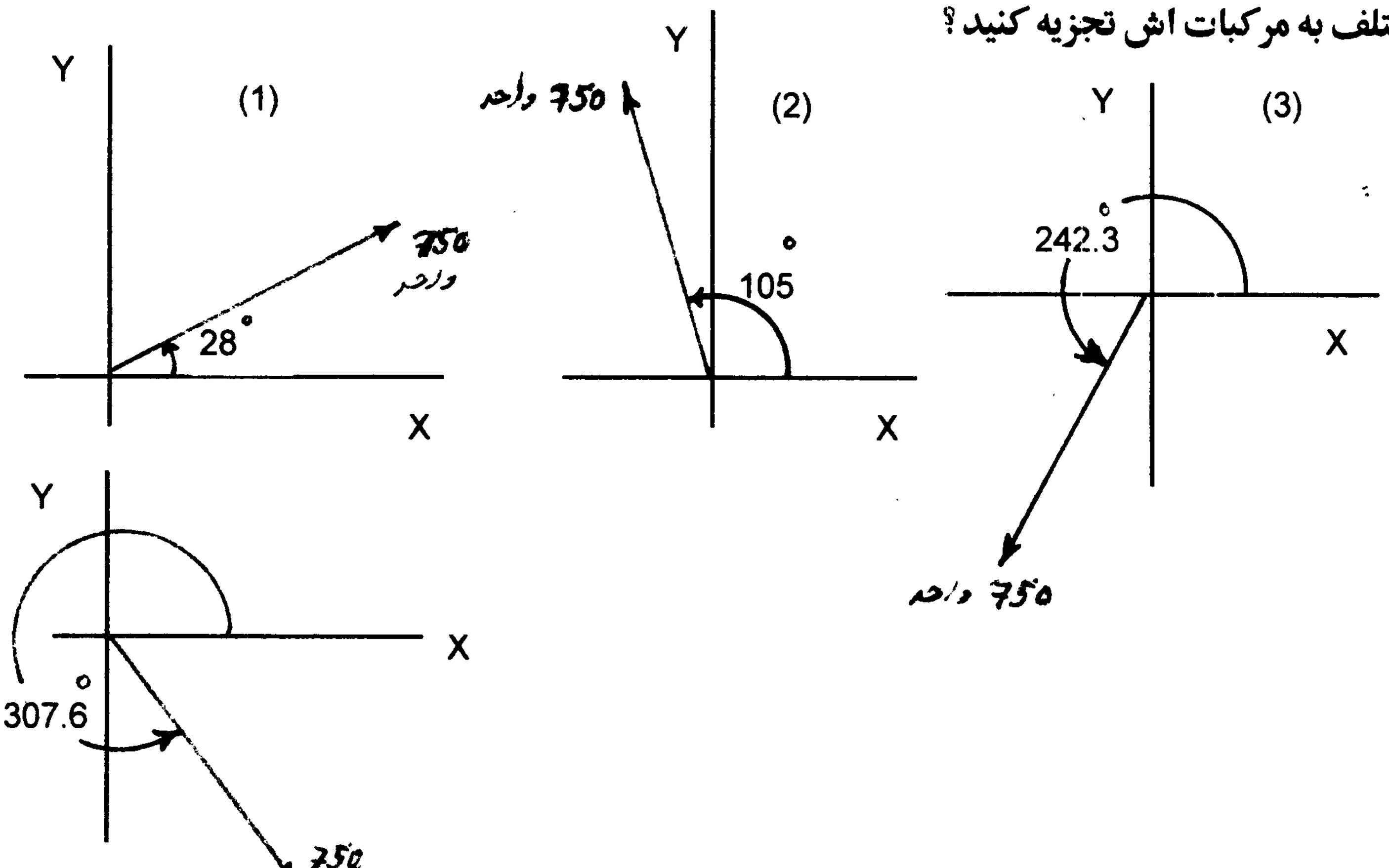




$$\vec{T}x = \vec{T}\cos 53.5^\circ = 85.0\cos 53.5^\circ = 50.6\ lb \qquad \vec{T}y = \vec{T}\sin 53.5^\circ = 85.0\sin 53.5^\circ = 68.3\ lb$$

تمرین (۲ ـــ ۳)

۱ ـــ در (تمرین ۱ ـــ ٤) ، کمیت یك ویکتور 750 واحد بوده و در ربع های مختلف موقعیت میگیرد ۰ این ویکتور را در چار حالت مختلف به مرکبات اش تجزیه کنید ؟



۲ ـــ در تمرین (٥ الی ١٦) ، ویکتور های داده شده را به طریقهٔ توابع مثلثاتی به مرکبات عمودی و افقی تجزیه کنید ؟

5.	8.60 lb; $\theta = 68^\circ$	6.	9750 lb, $\theta = 243^\circ$	7.	76.8, $\theta = 145^\circ$
8.	0.0998 lb , $\theta = 296^\circ$	9.	9.04 lb, $\theta = 283.3^\circ$	10.	16,000 lb, $\theta = 156.5^\circ$
11.	2.65 lb, $\theta = 197.3^\circ$	12.	67.8 lb, $\theta = 22.5^\circ$	13.	0.8734 lb, $\theta = 157.83^\circ$
14.	509.4 lb, 221.87°	15.	89,760, $\theta = 7.84^\circ$	16.	1.806 lb, $\theta = 301.83^\circ$

۱۷ ـــ یك مزایل به سرعت 250 mi / hr بزاویهٔ 25° درجه از سطح افقی فایر گردیده است ۰ مرکبات عمودی و افقی سرعت این مزایل را دریافت کنید ؟

۱۸ ـــ یك نفر سپورتمین در بازی فوتبال ، توپ فوتبال که بسرعت 40 ft / sec و بزاویهٔ 35° درجه از زمین شوت شده است ، مرکبات سرعت توپ موصوف را دریافت کنید ؟

۱۹ ـــ یك قوه بالای (چیراست دروازه) بزاویهٔ 17.5° درجه بطرف پآین عمل میکند ۰ اگر مقدار این قوه 45.5 lb باشد ۰ مرکبات این قوه را دریافت کنید ؟

۲۰ ـــ قوهٔ خطوط قوأ مقناطیسی 0.25 N بالای یك گلولهٔ فولادی عمل میکند ۰ اگر سمت عمل این قوه بزاویهٔ 13.6° درجه بطرف چپ بلندر از خط افقی باشد ، مرکبات این قوه را دریافت کنید ؟

۲۱ ـــ یك طیارهٔ جت فاصلهٔ 145 km. بزاویهٔ 37.5° درجه شمال از جنوب یك شهر را در پرواز خود طی نموده است ۰ فاصلهٔ عمودی و افقی این طیاره از شهر چقدر است ؟

۲۲ ـــ یك پیلوت طیارهٔ هایکوپتر ، حالت نشست طیارهٔ خود را مشا هده میکند ۰ این پیلوت نشست طیاره را بزاویهٔ دیپریشن (depression) ، (15°) درجه در صورت مشاهده میکند که طیاره موصوف بفاصلهٔ خط مستقیم 4,500 از او دورتر است ۰ فواصل عمودی و افقی هلیکوپتر ازین نشست را دریافت کنید ؟

۲۳ ـــ یك کیهان نورد در فضأ به قوهٔ جازبهٔ سیارهٔ مشتری (Jupitor) بزاویهٔ 2.55° درجه پأینتر از خط افقی بسرعت 18.55 mi / hr. داخل میشود ۰ مرکبات سرعت کیهان نورد را دریافت کنید ؟

۲۴ ـــ دو قوه مختلف به سمت محور Y بالای یك عدد بولت وارد میشوند ۰ قوهٔ اولی به مقدار 60.5 lb بوده وبزاویهٔ 82.4° درجه بالاتر از خط افقی عمل میکند ۰ و قوهٔ دومی که مقدار آن 137.2 lb بوده و بزاویهٔ 50.5° درجه دورتر از سمت عمل قوهٔ اولی عمل میکند۰ قوهٔ مجموعی (محصلهٔ) که بطرف بالا بالای بولت وارد میشود ، دریافت نمأیید؟

﴿ جمع ویکتور ها از طریق مرکبات ﴾

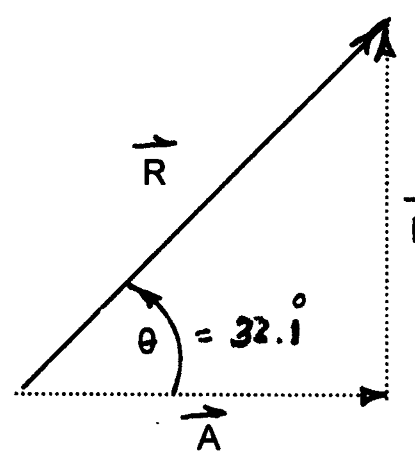
در مبحث گذشته ، ما توانیستیم که مفهوم مرکبات (اجزأ) ویکتور ها را درك و انکشاف بدیهیم ۰ با تسلسل محتویات گذشته ، حال ما در موقعیت هستیم که ویکتورها را بیشتر دقیقاً جمع و یا تفریق نمأیم ۰

دراینجا میتوانیم با استفادهٔ از قضیهٔ فیتا گورین ، تجزیهٔ مرکبات ویکتور و بکا ر برد تابع مثلثاتی ($\tan\theta$) که زاویهٔ θ در حالت ستندرد موقعیت داشته باشد ، حل نمأیم ۰

در مثالهای ذیل ما خواهیم دید که چطور ویکتور های که باهم عمود باشند ، با هم جمع نمأیم۰

مثا ل اول : ویکتور های ($\vec{B}$, $\vec{A}$) در صورت جمع نمأیدکه $\vec{A}$ = 14.5 lb و $\vec{B}$ = 9.10 lb بوده و با هم عمود اند :

با استفادهٔ قضیهٔ فیتا گورین ، ما چنین داریم :



$$\vec{R} = \sqrt{\vec{A}^2 + \vec{B}^2} = \sqrt{(14.5)^2 + (9.10)^2} = 17.1\ \text{lb}$$

سمت محصلهٔ (R) را از تابع $\tan\theta$ دریافت مینمأیم :

$$\tan\theta = \frac{\vec{B}}{\vec{A}} = \frac{9.10}{14.5} = 0.6276\ , \qquad \theta = 32.1^\circ$$

ما میتوانیم همین مثال را ازریعهٔ استفادهٔ کلکولیتر سا ینسی نیز حل نمأیم :

R = 14,5 (x^2) (+) 9.10 (x^2) = ($\sqrt{x}$) = 17.1

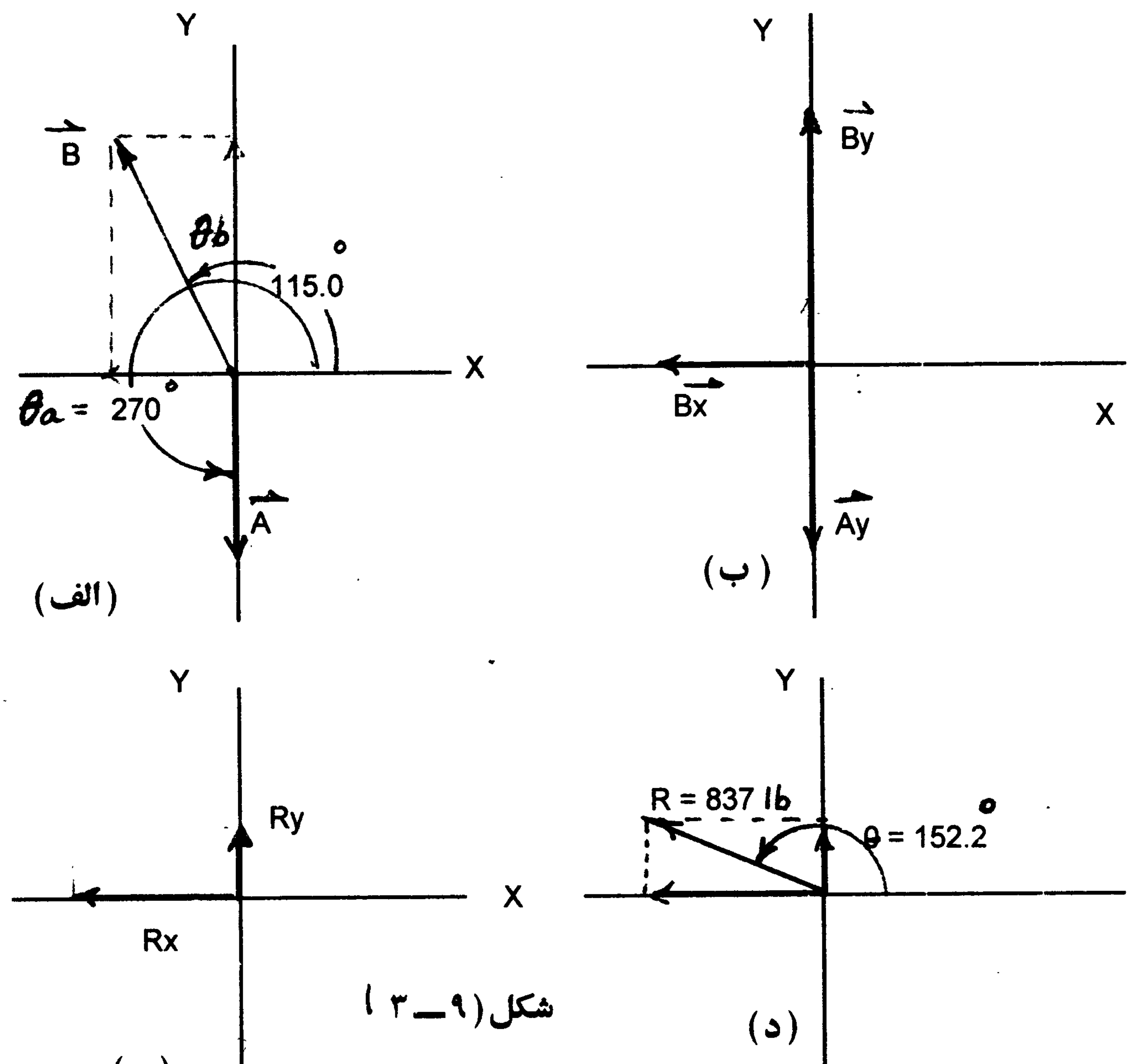
θ = 9.10 (÷) 14.5 (=) (ARCTAN), θ = 32.1°

هر گاه ویکتور های که با هم جمع مینمأیم ، باهم دیگر عمود نباشند ۰ درینصورت هر ویکتور را جداگانه در حالت ستندرد در مبدأ محورهای X و Y قرار میدیهیم۰ طوریکه شروع ویکتور بالای محور های X و Y در صفر قرار بگیرد۰ بعداً هر ویکتور را با مرکبات محوری F_x و F_y تجزیه مینمأیم ۰ در نتیجه تمام مرکبات محور X را جدا و تمام مرکبات محور Y را جدا با هم جمع مینمأیم۰ در اخیر، با استفادهٔ از قضیهٔ فیتا گورین و تابع $\tan\theta$ ، محصله و زاویهٔ محصله را بدست می آوریم ۰

مثال دوم : محصلهٔ دو ویکتور $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را در صورت پیدا کنید که : $\vec{A}$ = 1200 lb , $\vec{B}$ = 1750 lb

$\theta_a = 270^\circ$, $\theta_b = 115^\circ$

حل : نحست ، ویکتور ها را در کواردنت سیستم (Coordinate System) طوری قرار میدیهیم که شروع هر را در مبدأ (صفر) قرار بگیرند شکل (۹ الف ـــ ۳) ـ بعداً هر دو ویکتور را به مرکبات ، x و y تجزیه مینمأیم ۰ سپس تمام مرکبات x را جدا و مرکبات y را جدا با هم جمع می نمأیم ۰



شکل (۹ـ۳ ا)

در نتیجه ، با استفادهٔ از قضیهٔ فیتا گورین ، محصله را با زاویه ، سمت عمل آن چنین محاسبه میشود :

$$\vec{A}x = \vec{A}\cos 270^\circ = 1200\,(0) = 0$$

$$\vec{A}y = \vec{A}\sin 270^\circ = (1200)(-1) = -1200\ lb$$

$$\vec{B}x = \vec{B}\cos 115^\circ = 1750\,(-0.423) = -740\ lb \qquad (ب\ ۹ـ۳)$$

$$\vec{B}y = \vec{B}\sin 115^\circ = 1750\,(0.906) = 1590\ lb$$

$$\vec{R}x = \vec{A}x + \vec{B}x = 0 - 740 = -740 \qquad (ج\ ۹ـ۳)$$

$$\vec{R} = \sqrt{Rx^2 + Ry^2} = \sqrt{(-740)^2 + (390)^2} = 836\ lb$$

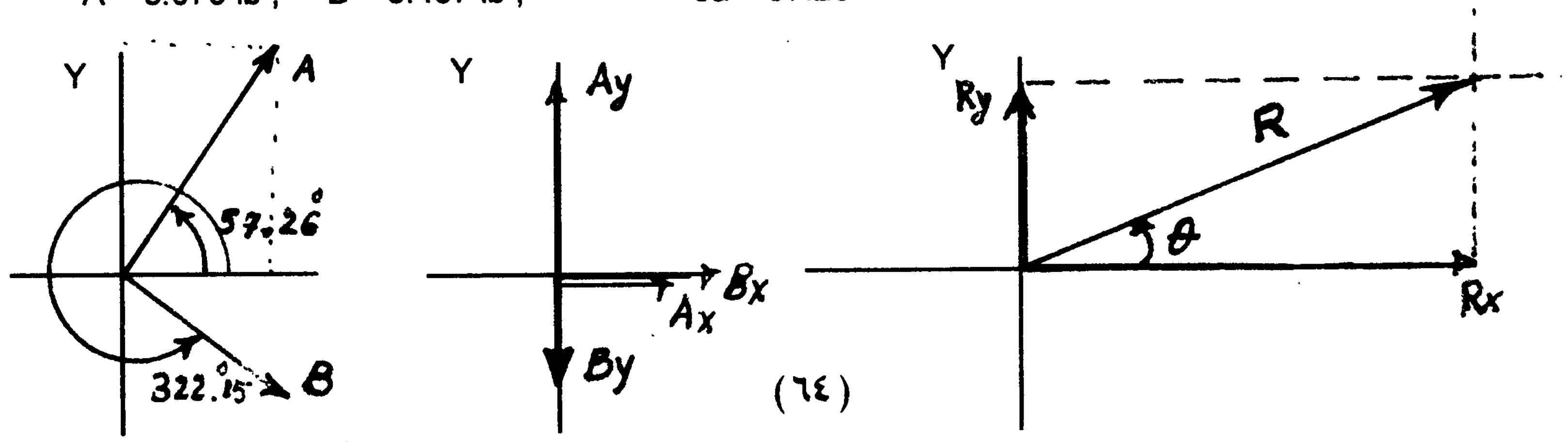
$$\vec{R}y = \vec{A}y + \vec{B}y = -1200 + 1590 = 390 \qquad (د\ ۹ـ۳)$$

$$\tan\theta = \frac{Ry}{Rx} = \frac{390}{-740} = -0.5270, \quad \theta = 152.2^\circ$$

در نتیجه ، مقدار محصله هر دو ویکتور : (836 lb) بزاویهٔ ، (152.2°) درجه میباشد· چون tan θ منفی است و همچنان : Rx منفی بوده در حالیکه Ry قیمت مثبت دارد ·

مثال سوم : محصلهٔ دو ویکتور که در شکل ذیل نشان داده شده است ، در صورت دریافت کنید که :

$\vec{A} = 8.075$ lb , $\vec{B} = 5.437$ lb , $\theta a = 57.26^\circ$ $\theta b = 322.15^\circ$



$\vec{A}_x = 8.075 \cos 57.26^\circ = 4.367$

$\vec{A}_y = 8.075 \sin 57.26^\circ = 6.792$

$\vec{B}_x = 5.437 \cos 322.15^\circ = 4.293$

$\vec{B}_y = 5.437 \sin 322.15^\circ = -3.336$

$\vec{R}_x = \vec{A}_x + \vec{B}_x = 4.367 + 4.293 = 8.660$

$\vec{R}_y = \vec{A}_y + \vec{B}_y = 6.792 - 3.336 = 3.456$

$\vec{R} = \sqrt{\vec{R}_x^2 + \vec{R}_y^2} = \sqrt{(8.66)^2 + (3.456)^2} = 9.324$

$\tan\theta = \vec{R}_y / \vec{R}_x = 3.456 / 8.66 = 0.3991$

$\theta = 21.76^\circ$

از حل مثال های فوق الذکر نتیجه میگیریم که محاسبات حود را با استفادهٔ از روابط ذیل مثلثاتی دریافت کرده میتوانیم :

$$\vec{A}_x = \vec{A}\cos\theta \quad , \quad \vec{A}_y = \vec{A}\sin\theta$$

$$\vec{A} = \sqrt{\vec{A}_x^2 + \vec{A}_y^2}$$

$$\tan\theta = \frac{\vec{A}_y}{\vec{A}_x}$$

طرزالعمل حل مثلثا تی ویکتور ها :

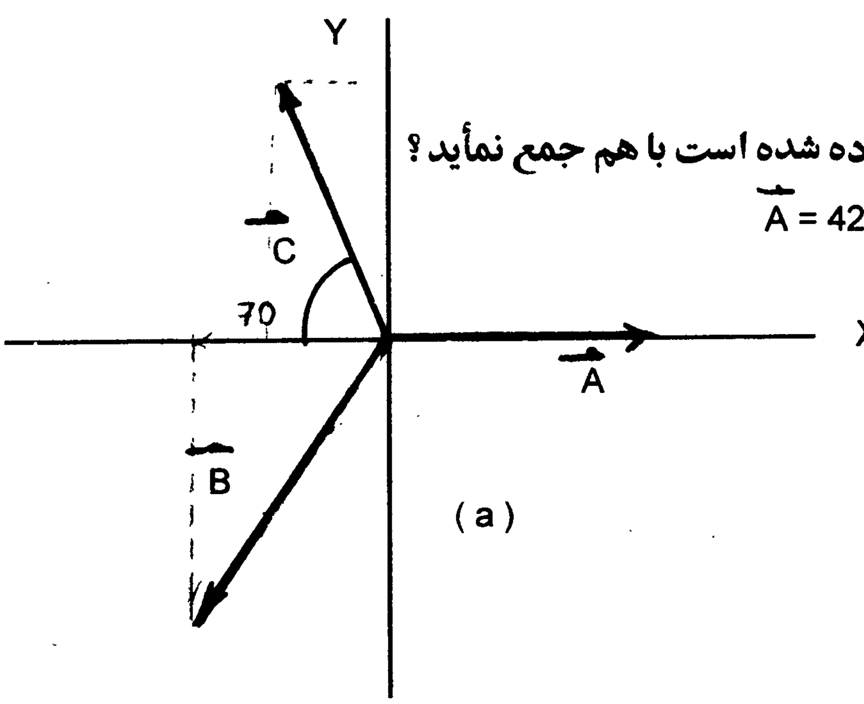
۱ـ ویکتور ها را به مرکبات x و y تجزیه میکنیم .

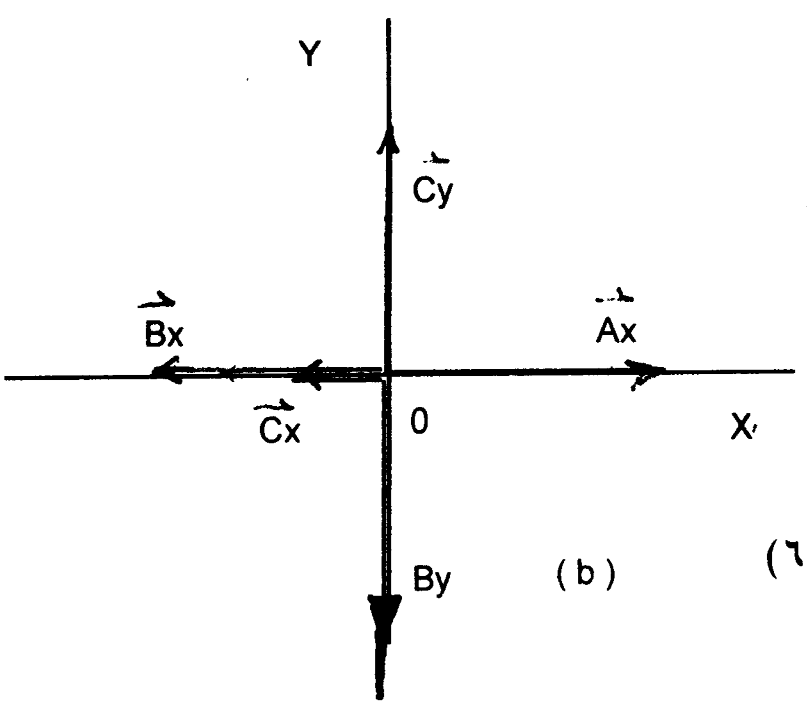
۲ـ مرکبات x را جدا و مرکبات y را جدا با هم جمع میکنیم که در نتجه آن $\vec{R}_x$ و $\vec{R}_y$ بدست می آید .

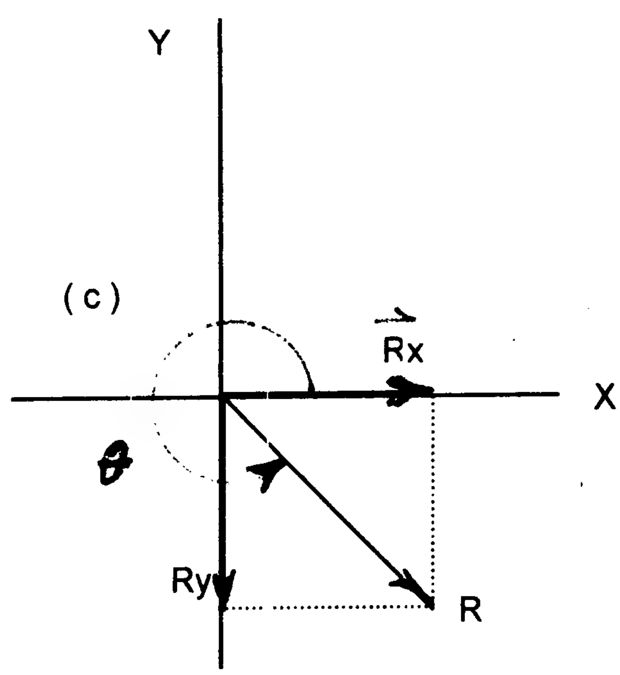
۳ـ ازجمع کردن $\vec{R}_x$ و $\vec{R}_y$ محصلهٔ عمومی $\vec{R}$ با استفادهٔ قضیهٔ فیثا گورین و تابع $\tan\theta$ دریافت میکنیم

مثا ل چا رم : سه ویکتور که در شکل ذیل نشان داده شده است با هم جمع نمأید ؟

$\vec{A} = 422$ lb , $\vec{B} = 405$ lb , $\vec{C} = 210$ lb







حل : به محاسبات ذیل توجه نمأید :

Vector	x -- component		y-- component	
A		= +422		= 0
B	$-405\cos 55^\circ$	= --232	$-405\sin 55^\circ$	= --332
C	$-210\cos 70^\circ$	= -- 72	$+210\sin 70$	= + 197
R		= 118		= -- 135

$$\vec{R} = \sqrt{\vec{R_x}^2 + \vec{R_y}^2} = \sqrt{(118)^2 + (-135)^2} = 179 \qquad \tan\theta = \frac{-135}{118} = -1.144$$

$$\theta = 311.2^\circ$$

﴾ تمرین سوم ﴿

۱ ــ از تمرین (۱ الی ٤) ویکتور های $\vec{A}$ و $\vec{B}$ با همدیگر عمود اند ، محصلهٔ آنها را دریافت کنید ؟

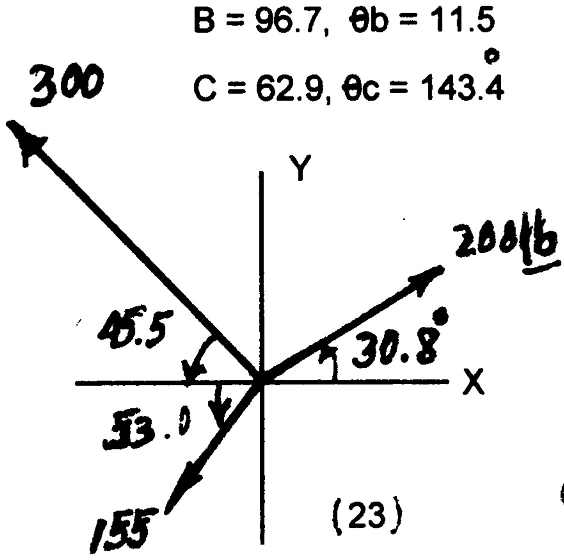
1.	A = 14.7	2.	A = 592	3.	A = 3.086	4.	A = 1734
	B = 19.2		B = 195		B = 7.143		B = 3297

۲ ــ در تمرین های (٥ الی ۱۲) سیت ویکتور ها داده شده ، محصله (R) و زاویهٔ (θ) آنرا محاسبه کنید ؟

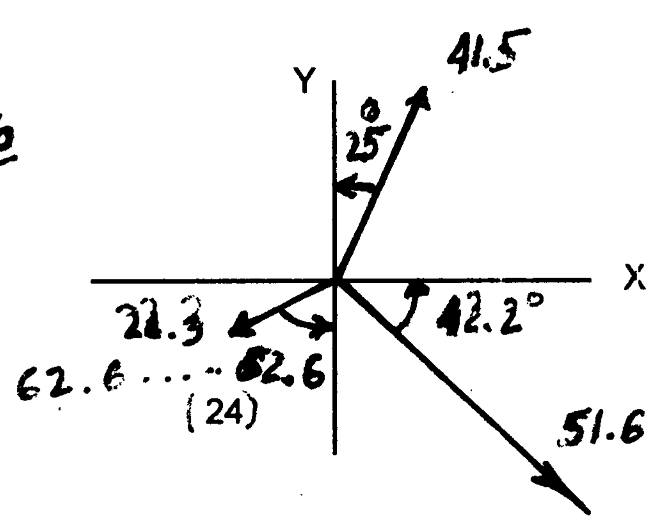
5.	Rx = 5.18, Ry = 8.56	6.	Rx = 89.6 , Ry = -- 52
7.	Rx = -- 0.982, Ry = 2.56	8.	Rx = -- 729 , Ry = -- 209
9.	Rx = -- 646 , Ry = 2030	10.	Rx = -- 31.2 , Ry = -- 41.2
11.	Rx = 0.6941 , Ry = -- 1.246	12.	Rx = 7.627 , Ry = -- 6.353

۳ ــ از تمرین (۱۳ الی ۲٤) ویکتور ها را با استفاده قضیهٔ فیثا گورین وتوابع مثلثاتی جمع نمأید ؟

13.	A = 18.0 , $\theta a = 0.0^\circ$ B = 12 , $\theta b = 27^\circ$	14.	A = 150 , $\theta a = 90^\circ$ B = 128 , $\theta b = 43^\circ$	15.	A 56 , $\theta a = 76^\circ$ B = 24 , $\theta b = 200^\circ$
16.	A = 6.89 , $\theta a = 123^\circ$ B = 29, $\theta b = 253.06^\circ$	17.	A = 9.821 , $\theta a = 34.27^\circ$ B = 17.45, $\theta b = 752.50^\circ$	18.	A = 1.653, $\theta a = 36.37^\circ$ B = 0.9807, $\theta b = 253.06^\circ$
19.	A = 12.653, $\theta a = 98.472^\circ$ B = 15.147 , $\theta b = 332.092^\circ$	20.	A = 121.36, $\theta a = 292.362^\circ$ B = 112.98, $\theta b = 197.892^\circ$		
21.	A = 21.9 , $\theta a = 236.2^\circ$ B = 96.7, $\theta b = 11.5^\circ$ C = 62.9, $\theta c = 143.4^\circ$	22.	A = 6300 , $\theta a = 189.6^\circ$ B 1760, $\theta b = 320.1^\circ$ C = 3240, $\theta c = 75.4^\circ$		



(23)

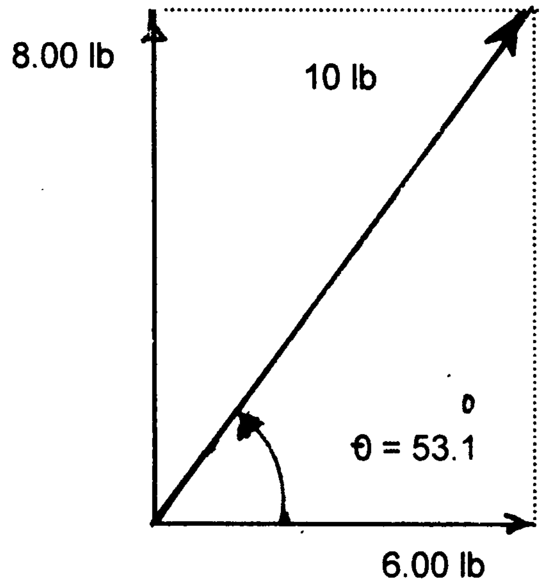


(24)

تطبیق ویکتور ها :

در دروس گذشته ، ما اهمیت آن مقادیر ویکتور مانند : قوه ، سرعت و تغیر مکان را مطالعه کردیم و همچنان جمع ویکتور ها را بطریقه های مختلیف تحت بحث قرار دادیم ۰ حال ما میخوا هیم که تطبیقات عملی ویکتور ها را مطالعه نمأیم :

مثال اول : دو قوهٔ 6 lb و 8 lb بالای یك جسم طوری عمل کرده است که خط عمل آنها با هم دیگر عمود میباشند ؟



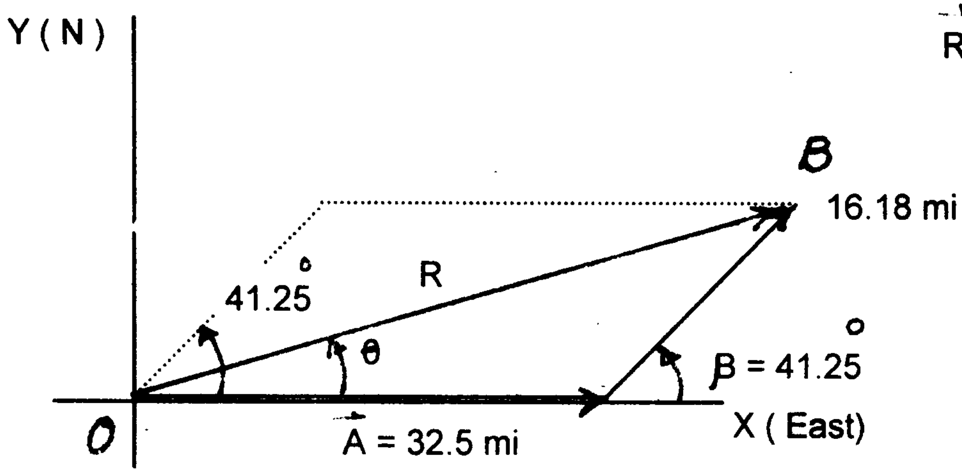
$\vec{F_y} = 8.00\ lb\ ,\quad \vec{F_x} = 6.00\ ib$

$\vec{F} = \sqrt{(6)^2 + (8)^2} = 10\ lb$

$\tan^{-1}\theta = \dfrac{F_y}{F_x} = \dfrac{8}{6} = 1.333$

$\theta = 53.1^\circ$

مثا ل دوم : یك کشتی به فاصلهٔ 32 .5 mile بطرف شرق حرکت میکند ۰ و بعداً بزاویهٔ 41.25° شمال از شرق دور میخورد و به فاصلهٔ 16.18 mile تا نقطهٔ B میرسد ۰ شما دریافت کنید که کشتی موصوف از نقطهٔ اولی بکدام فاصله موقیعت دارد ؟



$\vec{R_x} = \vec{A} + \vec{B_x} = 32.5 + 16.18 \cos 41.25^\circ$

$= 32.50 + 12.16 = 44.66\ mile$

$\vec{R_y} = 16.18 \sin 41.25 = 10.67\ mi$

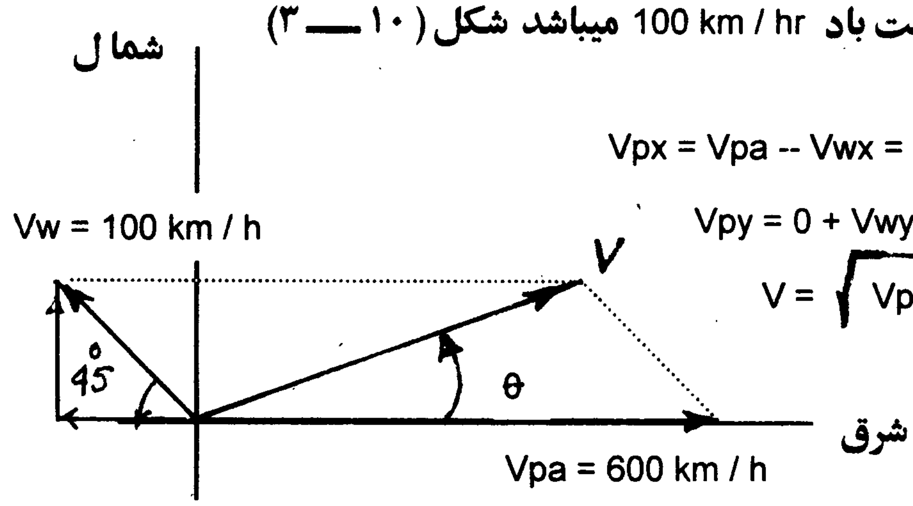
$R = \sqrt{(44.66)^2 + (10.67)^2} = 45.92\ mi$

$\tan^{-1}\theta = \dfrac{10.67}{44.66} = 0.2389\ ,\qquad \theta = 13.44^\circ$

مثا ل سوم :

یك طیاره به سمت شرق در حرکت است ۰ باد به طرف شما ل ـ غرب میوزد ۰ سرعت طیاره نظر به سطح زمین چند میشود ۰ در صورتیکه سرعت طیاره نظر به هوا 600 km / hr و سرعت باد 100 km / hr میباشد شکل (۱۰ ــــ ۳)

حل :



$V_{px} = V_{pa} - V_{wx} = 600 - 100 (\cos 45^\circ) = 529\ km / hr.$

$V_{py} = 0 + V_{wy} = 100 (\sin 45^\circ) = 70.7\ km / hr.$

$V = \sqrt{V_{px}^2 + V_{py}^2} = \sqrt{(529)^2 + (70.7)^2} = 534\ km /h$

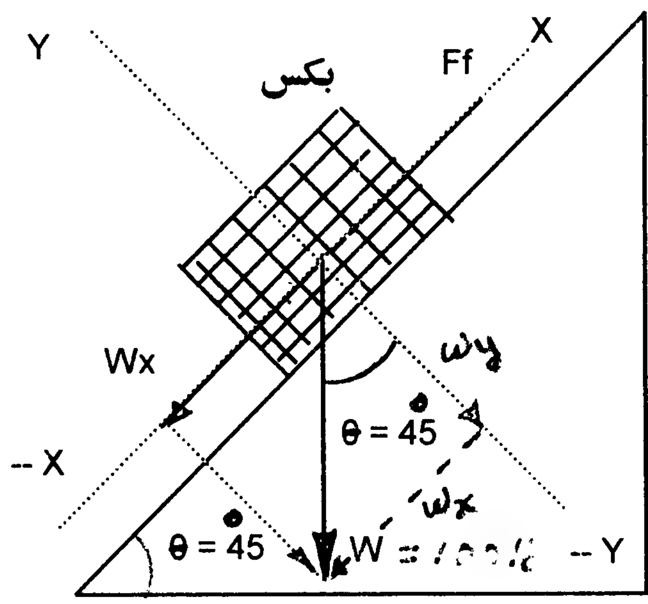
$\tan^{-1}\theta = \dfrac{V_{py}}{V_{px}} = \dfrac{70.7}{529} = 0.1336$

$\theta = 7.6^\circ$

Vpa ، سرعت طیاره نظر به هوا ,　　　Vpx ، سرعت طیاره به سمت X (شرق)

Vpy ، مرکبهٔ ویکتور سرعت باد به سمت Y　　　Vw ، سرعت باد به سمت شمال ـ غرب

مثال چارم : یك بكس بالای یك مستوی مائل كه همرای سطح زمین (سطح افقی) زاویهٔ 45° درجه میسازد ، گذاشته شده است اگر وزن این بكس 100 lb باشد ، قوهٔ اصطكاك بین بكس و سطح مستوی مایل چند خواهد بود ؟

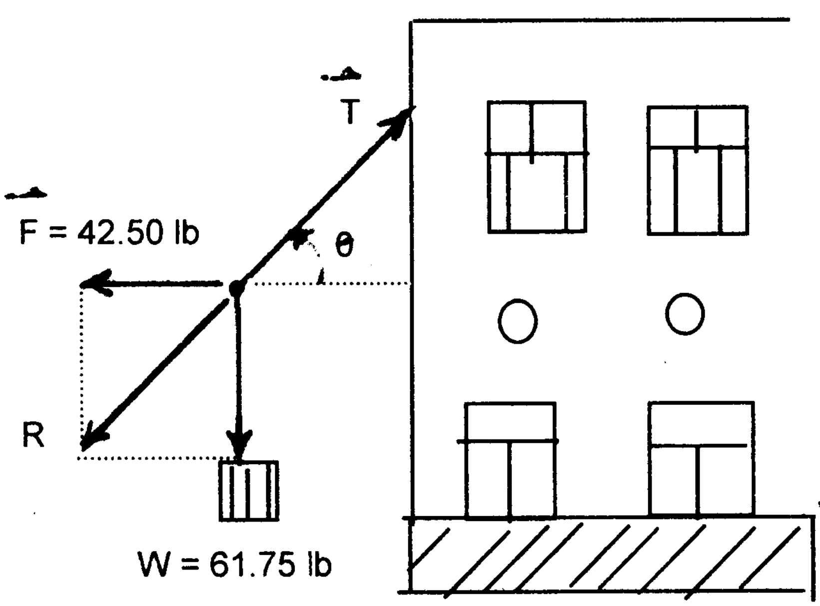


حل : (۱) محورهای X و Y را بالای بكس قرار میدیهیم ٠ شكل مقابل

(۲) قوهٔ اصطكاك (friction force) مساوی میشود به مركبهٔ افقی وزن بكس ٠ یا (Ff = Wx) ٠

$$Ff = Wx = W \sin \theta = 100 (\sin 45^\circ) = 100 (0.707) = 70.7 \text{ lb}$$

مثال پنجم : یك وزن 61.75 lb از طریق یك چنگك از یك دیوار توسط ریسمان آویزان گردیده است ٠ اگر یك قوهٔ 42.50 lb این جسم را از دیوار دورتر كش كند تا آنكه جسم موصوف در حالت توازن بیاید (قوهٔ محصله مساوی به صفر گردد) ، قوهٔ كشش T را در ریسمان دریافت كنید ؟



$$-\vec{T} = \vec{R} = \sqrt{W^2 + F^2} = \sqrt{Rx^2 + Ry^2}$$

$$-\vec{T} = \vec{R} = \sqrt{(42.50)^2 + (61.75)^2} = 74.96 \text{ lb}$$

$$\tan \theta = \frac{61.75}{42.50} = 1.453 \qquad \theta = 55.46^\circ$$

﴿ سوالات عبارتی فصل سوم ﴾

۱ ـــ دو قوه با الترتیب ، 45 lb و 68 lb بالای یك (در) یك نقطه طوری عمل میكند كه زاویهٔ بین این دو قوه 90° درجه است ، شما محصله این دو قوه را دریافت كنید ؟

۲ ـــ دو قوه باالترتیب 145.5 lb و 219.3 lb یك جسم را بترتیب كش میكند كه زاویه بین این دوقوه 90° درجه است ، محصلهٔ این دو قوه را دریافت كنید ؟

۳ ـــ دو قوه با الترتیب 346.4 N و 521 N یك جسم را در عین وقت كش میكند ٠ زاویه بین دو قوه 25.32 درجه است ٠ شما محصلهٔ این دو قوه را دریافت كنید ؟

٤ ـــ زاویه بین دو قوه كه بالای یك جسم عمل میكند 63.0° درجه است ٠ اگر هر دو قوه باالترتیب 86 N و 10.3 N باشند ٠ محصلهٔ این قوه ها پیدا كنید ؟

٥ ـــ یك طیاره جیت از یك شهر به سمت غرب 450 میل سفر میكند ٠ بعداً طیاره دور میخورد و 250 میل بطرف جنوب سفر میكند ٠ شما پیدا كنید كه طیارهٔ موصوف بكدام فاصله از شهر موقیت دارد ؟

٦ ـــ يك كشتي از يك كنار دريا به فاصلهٔ 76.36 km. بطرف شمال حركت ميكند ٠ بعداً كشتي دور ميخورد و به سمت شرق به فاصلهٔ 51.21 km. حركت ميكند ٠ كشتي موصوف از كنار دريا چقدر دور تر موقعيت دارد ؟

٧ ـــ قريهٔ B به اندازهٔ 52.10 ميل در جنوب شرق قريهٔ A موقعيت دارد٠ قريهٔ C به اندازهٔ 45.25 درغرب قريه B موقعيت دارد٠ قريهٔ C از قريهٔ B به چه فاصله موقعيت دارد ؟

٨ ـ يك سروير يك درخت را به فاصلهٔ 36.50 بطرف شمال شرق نشاني ميكند ٠ او ميداند كه اين درخت به فاصلهٔ 21.38 m به سمت شمال يك پايهٔ برق موقعيت دارد ٠ شما دريافت كنيد كه اين سروير از پايهٔ برق چقدر دورتر موقعيت دارد ؟

٩ ـ يك سنگ بطرف بالا پرتاب شده است كه مركبهٔ عمودي سرعت سنگ 72.5 ft/sec ومركبهٔ سرعت افقي اين سنگ 57.5 ft/s ميباشد ٠ سرعت حقيقي اين سنگ چقدر است ؟

١٠ ـــ يك راكت به هوا پرتاب گرديده است ، كه مركبهٔ عمودي سرعت راكت 1520 km / hr. ومركبهٔ سرعت افقي اين راكت 2840 km /h ميباشد، اصل سرعت اين راكت را دريافت كنيد ؟

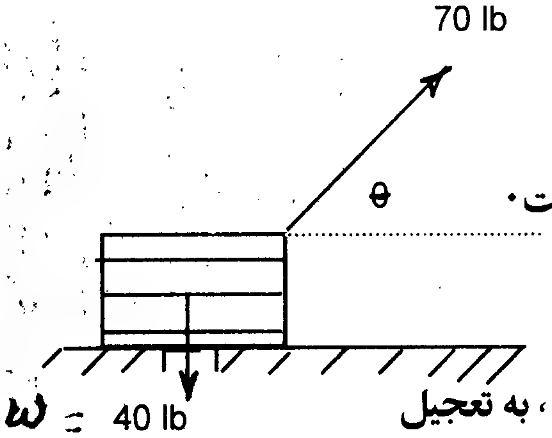
١١ ـــ يك طفل كه وزن آن 60.01 lb بوده در يك گهواره پارك نشسته است ٠ و به يك قوهٔ افقي 20 lb به يك سمت تيله شده است ٠ قوهٔ كشش را در هر يك از رسمانها دريافت كنيد٠ و همچنان ، زاويهٔ بين ريسمانها و سطح افقي چند درجه است ؟

١٢ ـــ يك ريسمان به طول 12.15 ft از دو ميخ كه از همديگر 10.50 ft فاصله دارند بند شده است ٠ هر دو ميخ در يك سطح واقع اند ٠ بعداً يك وزن 175 lb از وسط اين ريسمان آويزان گرديده است ٠ قوهٔ كشش را در ريسمان دريافت نمأيد ؟

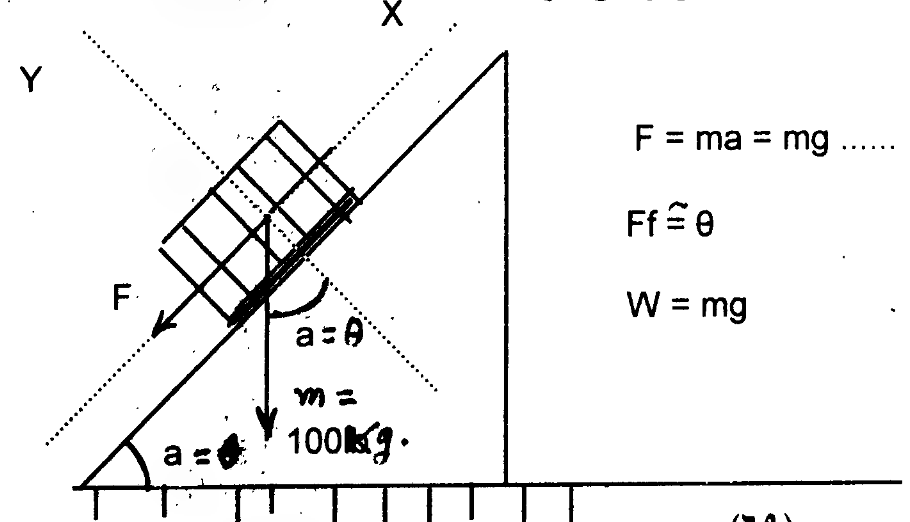
١٣ يك سنگ از يك طياره كه بسرعت 200 m / sec در پرواز است ، پرتاب گرديده است ٠ اگر همين سنگ به سرعت 50 m / sec به سمت كه بالاى سمت حركت طياره عمود باشد پرتاب شده باشد، شما سرعت سنگ در لحظهٔ دريافت كنيد كه سنگ طياره را ترك ميگويد ؟

١٤ ـــ يك طياره به سرعت 500 km / h نظر به هوا به سمت شمال پرواز ميكند٠ اگر باد از سمت جنوب ـ غرب به سرعت 80 km / hr بوزد ، سرعت نتيجوى طياره موصوف چند خواهد بود و همچنان سمت حركت طياره را دريافت كنيد ؟

١٥ ـــ يك قوه 70 lb به يك بكس در حالت ساكن كه وزن آن 40 lb ميباشد، تطبيق گرديده است ٠ شكل ذيل ٠٠٠٠ اين قوه صرف كافي است تا بكس رامحض از زمين بالاكند٠ پيدا كنيد كه اين قوه همراى سطح افقي چند درجه زاويه ميسازد٠ مركبهٔ افقي اين قوه چند خواهد بود ؟



١٦ ـــ در شكل ذيل ، بكس با سطح مايل فاقد اصطكاك است٠ و همچنين زاويهٔ مستوى مايل نيز داده نشده است ٠ اگر تعجيل جا ذبهٔ زمين مساوي به 9.8 m / sec^2 بوده باشد و جسم (بكس) موصوف كه بالاى سطح مايل موقعيت دارد ، به تعجيل 2.75 m / sec^2 بطرف پأين حركت كند ، زاويهٔ سطح مايل را با سطح زمين دريافت كنيد ؟



F = ma = mg ...... قانون دوم نيوتن

Ff ≅ θ

W = mg

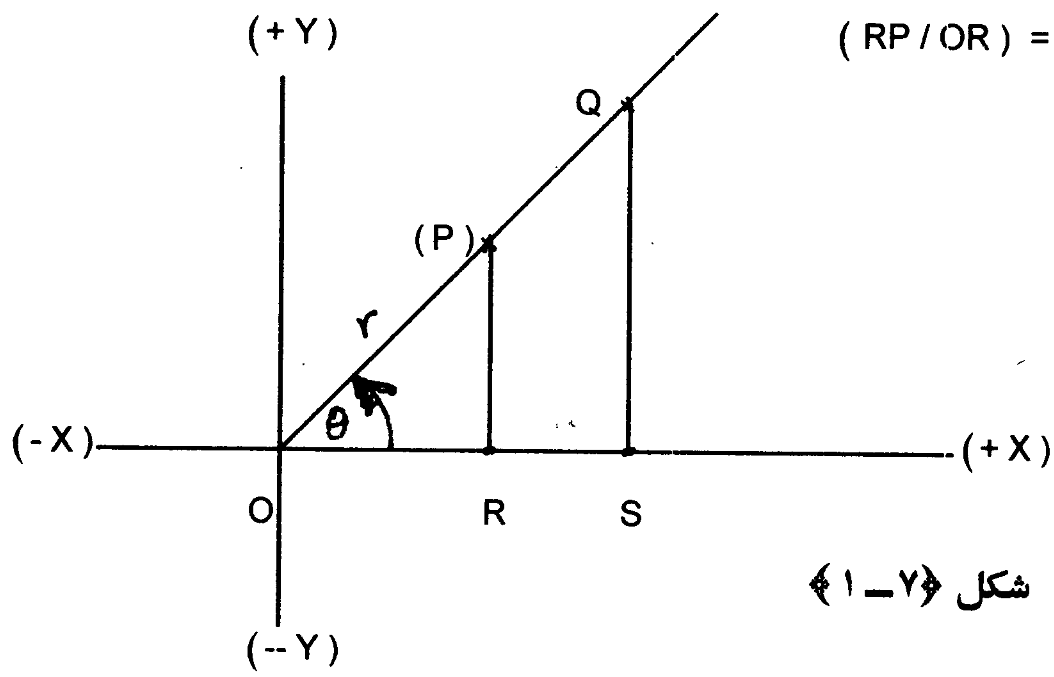
در تمرینات (۴۱ الی ۴۲) زاویه ها را با استفا ده کلکولیتر به اعشاری حل کنید؟ وهمچنان تمرینات (۴۳ الی ۴۴) را به ثانیه تبدیل کنید؟

41. $21^\circ 42' 36''$ 42. $7^\circ 16'' 23'$ 43. 86.274° 44. 57.019°

تعریف توابع مثلثاتی :

بیا ئید زاویٔه (θ) را در حالت ستندرد قرار بدیهیم ۰ و بعدأ از ضلع نهایئ (دوم) آن دو عمود را از نقاط (P) و (Q) بالای محور (X) رسم کنیم ، شکل (۷ـ۱) ۰ با اجرأ این کار دو مثلث مشابه بدست می آیند که رؤس شان در نقطهٔ (O) و یك یك ضلع آنها با لای محور (X+) منطبق میبا شند ۰ با استفادهٔ این دو مثلث با هم مشابه ، تناسب ذیل بدست می آید۰ در شکل (۷ـ۱) مشاهده مینمائیم که مثلث ($\overset{\Delta}{ORP}$) و مثلث ($\overset{\Delta}{OSQ}$) با هم مشابه اند۰ که از مشابهت های فوق نو شته کرده میتوانیم :

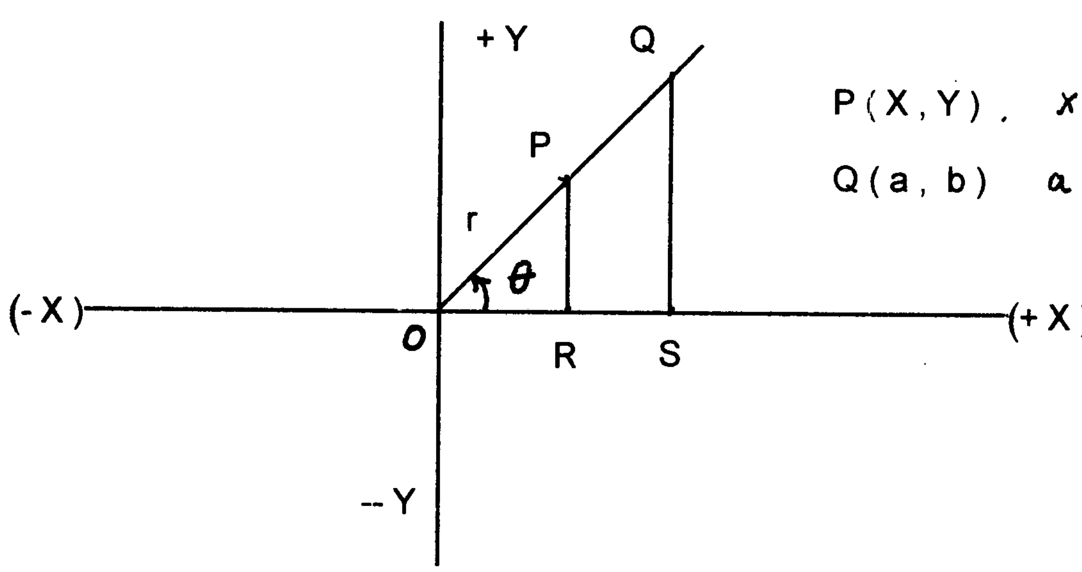
$$(RP / OR) = (SQ / OS)$$



شکل ﴿۷ـ۱﴾

در مثلث های شکل (۷ـ۱) سه فا صله از نقطٔ (O) مبدأ ، کواردینت مهم وقابل توجه اند۰ طول آن ضلع اولی زاویه که بالای محور (X) واقع است ، بنام ابسیسا (Abscissa) یا کواردینت (X) یاد میشود۰ و طول ضلع عمودی که مرتسم های عمودی آنها بالای محور (Y) می افتد ، بنام آردینت(Ordinate) یا کواردینیت (Y) بوده ، وفاصلهٔ از نقطهٔ (O) تا به آخرین نقطهٔ بالا ی ضلع نهای (r) ، بنام ویکتور شعاع(Radius Vector) یاد میشود۰

شکل (۸ـ۱) ، همان زاویه (θ) شکل (۷ـ۱) را نشان میدهد ، با تفاوت اینکه به نقاط هر کدام ؛(P) و(Q) قیمت های معین اتخاذ کرده ایم ۰ و طول وتر را به (r) نشان میدیهیم ۰ طول (r) به اعتبار نقطهٔ (P) ، عبارت از (OP) است ۰ و همچنان طول (r) به اعتبار نقطهٔ (Q) فاصلهٔ (OQ) است ۰ قبلاً در شکل (۷ـ۱) ملا حظه نمودیم که مثلث های (ORP) و (OSQ) با هم مشابه اند۰ در شکل (۸ـ۱) فاصلهٔ (RP) آردینت (Ordinate) نقطهٔ (P) است ، و فاصلهٔ (OR) ابسیسا (Abscissa) نقطهٔ (P) و فا صلهٔ (SQ) آردینت (Ordinate) نقطهٔ (Q) و همچنان فاصلهٔ (OS) ابسیسا (Abscissa) نقطٔ (Q) میباشند۰



P(X, Y) , X = R

Q(a, b) a = S , y = b

﴿شکل (۸ـ۱)﴾

به اساس مشا بهات مثلث ها ی ($\overset{\Delta}{ORP}$) و ($\overset{\Delta}{OSQ}$) داریم که : . . . . (RP/ OR = SQ / OS)

۱۷ ـــــ در شکل فوق الذکر ، اگر قوهٔ 20 lb اضافی بالای جسم به سمت بالا ، بزاویهٔ 50 درجه همرای سطح مایل عمل کند ۰ قوهٔ که از طرف سطح مایل بالای جسم عمل میکند چند خواهد بود ؟

۱۸ ـــــ در شکل فوق الذکر ، اگر یك قوهٔ افقی 10 lb بطرف راست جسم عمل بکند ۰ قوهٔ اسطکاك را دریافت کنید تا آنکه جسم موصوف بطرف پأین ـحرکت نکند ؟

۱۹ ـــ یك جسم از یك طیاره که به سرعت 120 m / sec در پرواز است بطرف پأین آزاد انداخته میشود ۰ اگر مرکبهٔ سرعت عمودی به تابع وقت مساوی باشد به افادهٔ : $Vy = 9.8\,t^2$ ، سرعت این جسم را بعد از 4.5 sec دریافت کنید ۰ و همچنان سمت حرکت را نیز پیدا کنید ؟

۲۰ ـــ مقدار مرکبه های افقی وعمودی سمت حرکت یك میزایل به معادلات ذیل ارأیه داده شده است : $dH = 120\,t$ و $dV = 160\,t - 16\,t^2$ ، که درین معادلات t به ثانیه توضیح گردیده است ۰ موقیعت مزایل را به واحد فت بعد از 3 ثانیه دریافت کنید ؟

۲۲ ـــ یك کشتی یك دریا را عبور (cross) میکند وبه نقطهٔ آن طرف دریا که مقابل نقطهٔ حرکت اولی قرار دارد میرسد ۰ اگر سرعت کشتی موصوف درآب استاده 6.0 km / hr. باشد ۰ وسرعت جریان آب دریا 3.0 km / hr. بوده باشد ، کشتی بکدام سرعت از دریا عبور کرده است ؟

۲۳ ـــ در شکل ذیل یك هادی که سمت جریان آن بالای صفحهٔ این کاغذ عمود است ،جریا ن برقی i را انتقال میدیهد ۰ یك میلهٔ مقناطسی که قدرت مقناطیسیت قطب های آن m است در سطح کاغذ قرار دارد ۰ویکتور های : Hs, Hn, Hi مرکبه های ویکتور های شدت ساحه را نظر به جریان هادی و قطب های شمال و جنوب مقناطیس نشان میدهد ۰ مقدار (کمیت) هر مرکبه به فورمولهای ذیل نشان داده شده است :

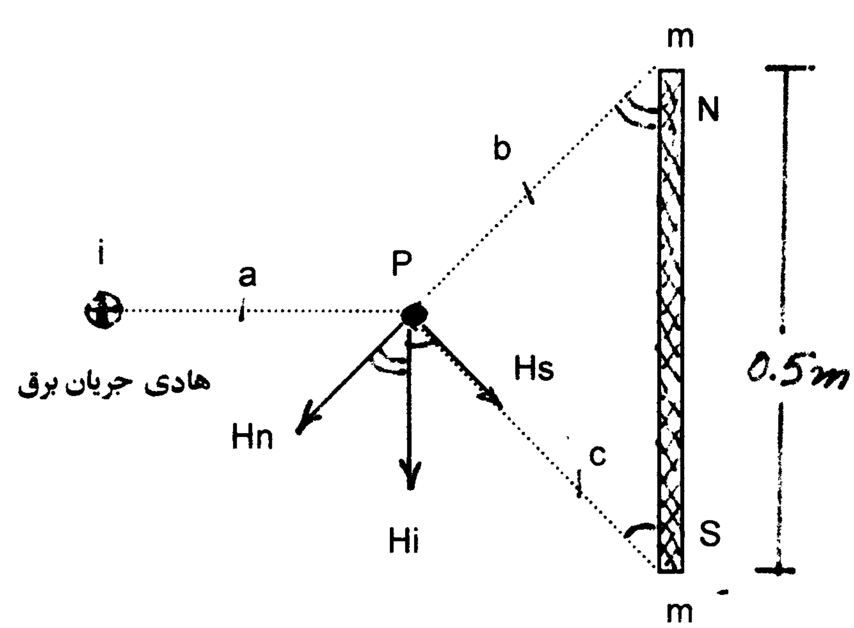
$$Hi = \frac{1}{2\pi}\,\frac{i}{a} \quad , \quad Hn = \frac{1}{4\pi}\,\frac{m}{b^2} \quad \quad Hs = \frac{1}{4\pi}\,\frac{m}{c^2}$$

قیمت های ذیل را در نظر بگیرید ـــ :

a = 0.3 m. b = 0.4m c = 0.3m i =4.0 A m = 2 .0 A/m

A·m

مجموعه H چند است ؟



۲۴ ـــ سوال (۲۳) را در صورت حل کنید که سمت Hi به مقابل میلهٔ مقناطیس عمل بکند و زاویهٔ 10^{o} درجه را همرای سمت مقنا طیس بسازد ؟

﴿ قانون ساین ﴾

(Sine Law)

مثلث های کیفی ، (قانون ساین) : از دروس گذشته ،تا الحال بحث ما صرف پیرامون حل مثلث های قایم الزاویه بوده است ۰ امادر تطبیق و عمل علم فزیك و علوم تخنیکی ضرورت می افتد ، تا مثلثهای را نیز حل نمأیم که زاویهٔ قایمه نمیداشته باشند ۰

چنین مثلث ها ـ بنام مثلث های کیفی (Obliques) ، یا غیر قایم یاد میشوند ۰

حال میخوا هیم حل مثلث های کیفی را تحت مطالعه قرار بدیهیم ۰ در بخش های گذشته ما دانیستیم که حل یك مثلث وقتی امکان پذیر است که سه عنصر آنرا بدانیم به شرطیکه یك از آن عنصر ضلع باشد ۰ با درنظرداشت همین مطلب ، برای حل یك مثلث ، تمام شرأیط را در چار حالت خلاصه مینمأیم وتحت شرأیط ذیل میتوانیم یك مثلث را حل نمأیم ۰

- حالت اول : دو زاویه و یك ضلع معلوم باشند ۰
- حالت دوم : دوضلع ویك زاویهٔ مقابل ضلع معلوم باشند ۰
- حالت سوم : دو ضلع ویك زاویهٔ مابین آن دو ضلع معلوم باشند ۰
- حالت چارم : سه ضلع مثلث معلوم باشند ۰

اگرچه ، چندین طریقه موجود است که به کمك آن ما میتوانیم مثلث های کیفی را حل نمأیم ، ولی در اینجاه ما توجهٔ خویش را صرف به سه طریقهٔ (قوانین) علم مثلثات که بسیار عمده میباشند ، معطوف میداریم :

- قانون ساین (Law of Sine)
- قانون کوساین (Law of Cosine)
- قانون تانجنت (Law of tangent)

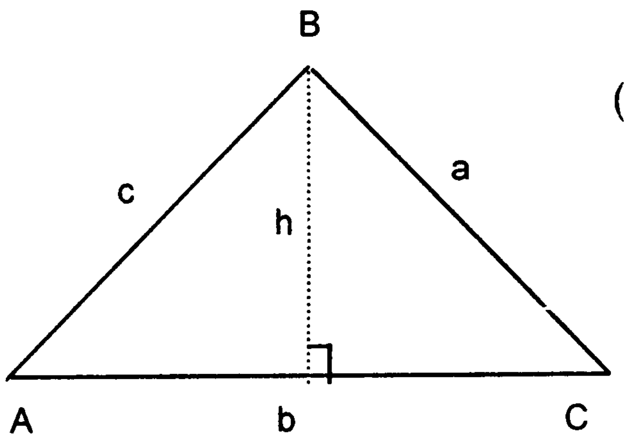
ثبوت قانون ساین : در شکل (۱۲ ــ ۳) ، مثلث ABC را تحت مطالعه قرار میدیهیم ۰ فرضاً در مثلث ABC اضلاع آن بالترتیب ، c , b, a باشند ۰ بعداًیك عمود از زاویهٔ B بالای ضلع b رسم مینمأیم ۰ حال مطابق تعریفات دروس گذشته

$\sin A = \frac{h}{c}$, $\sin C = \frac{h}{a}$ .... تعریفات توابع مثلثاتی

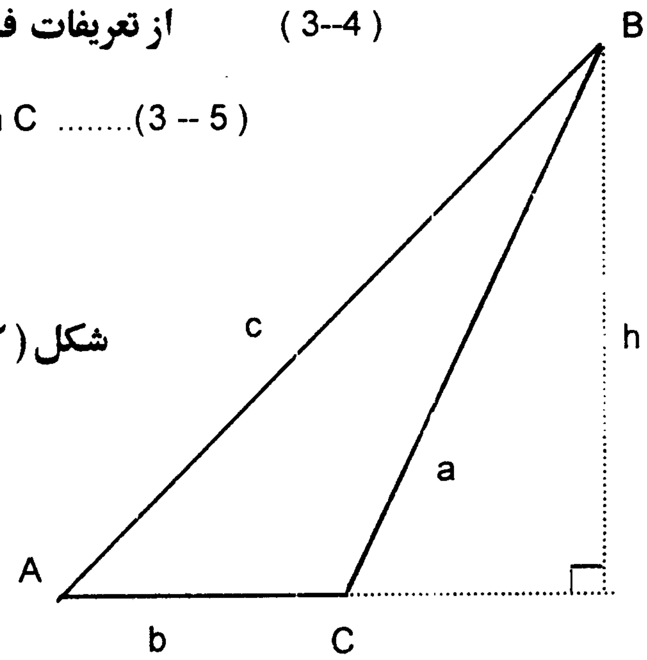
چنین نوشته کرده میتوانیم :

$h = c \sin A$, $h = a \sin C$ .... از تعریفات فوق الذکر (4--3)

$h = c \sin A$, $h = a \sin (180 - C) = a \sin C$ ....(3 -- 5)



شکل (۱۲ ــ ۳)



چون در معادلات (4 -- 3) و (5 --- 3) ، یکطرف هردو معادله با هم مساوی اند ، لهذا : چنین نوشته کرده میتوانیم ٠

$$c \sin A = a \sin C \implies \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \quad ....(3 -- 6)$$

$$c \sin B = b \sin C \implies \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad ....(3 -- 7)$$

هر گاه معادلات (7 -- 3) و (6 --- 3) را با هم تعویض نمأیم ، در نتیجه قانون ساین بدست می آید ٠

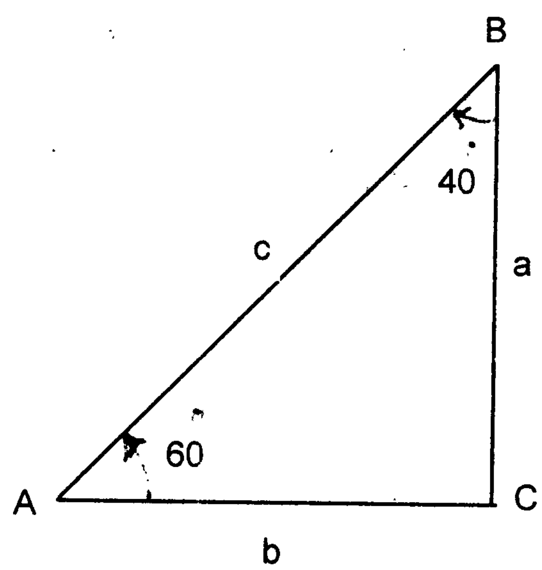
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad .... (3 --- 8) .....$$ قانون ساین

قانون ساین تناسب بین اضلاع و ساین زاویه ها ی یك مثلث را نشان میدیهد٠ حال باید دانست که قانون ساین برای حل مثلث که دو زاویه ویك ضلع آن معلوم باشد بکار میرود ٠ اگر دوزاویهٔ یك مثلث معلوم باشند ، زاویهٔ سوم طوری پیدا میشود که مجموع دوزاویه معلوم را از 180° درجه تفریق مینمأیم بعداً ، با استفاده از " قانون ساین " سایر اجزأ مثلث را حل کرده میتوانیم ٠

مثال اول : اگر در یك مثلث اجزأ c , A , B معلوم باشند ، اجزأ دیگر آنرا پیدا کنید؟ شکل (۱۳ ـــــ ۳)

$c = 6$, $A = 60°$, $B = 40°$ .... داده شده است

$$C = 180° - (60° + 40°) = 80°$$



شکل (۱۳ ـــــ ۳)

$$\frac{a}{\sin 60°} = \frac{6}{\sin 80°} \quad \text{یا} \quad a = \frac{6 (\sin 60°)}{\sin 80°} = 5.28$$

$$\frac{b}{\sin 40°} = \frac{6}{\sin 80°} \quad \text{یا} \quad (b) = \frac{6 (\sin 40°)}{\sin 80°} = 3.92$$

لهذا : $a = 5.28$, $b = 3.92$, $C = 80°$

ما میتوانیم محاسبه فوق را ذریعهٔ کلکولیتر به سهولت پیدا کنیم :

a = 6 ÷ 80 [sin] [=] [X] 60 [sin] [=] 5.28

b = 6 ÷ 80 (sin) (=) (X) 40 (sin) (=) 3.92

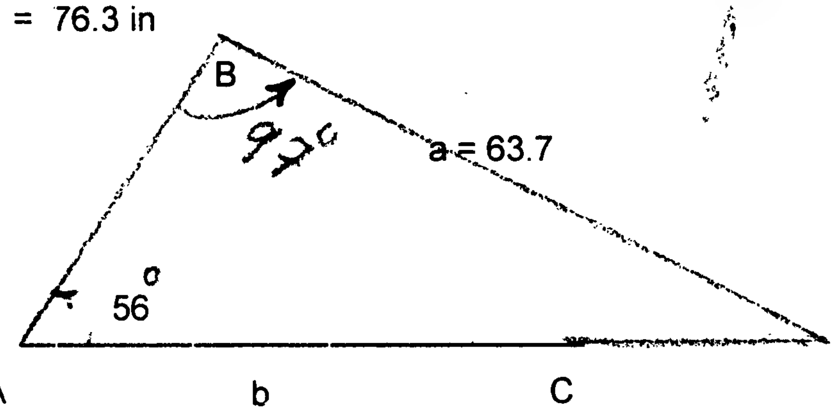
مثا ل دوم : مثلثی را حل نمأید که عناصر ذیل دران داده شده باشند ؟ (شکل ـ ١٤ ــــ ٣)

$a = 63.7$ in , $A = 56^\circ$, $B = 97^\circ$

حل : چون دو زاویه معلوم است ، زاویهٔ سوم عبارت است از : $C = 180^\circ - (A + B) = 27^\circ$

$$\frac{b}{\sin 97.0^\circ} = \frac{63.7}{\sin 56^\circ} \Longrightarrow b = \frac{63.7 \sin 97.0^\circ}{\sin 56^\circ} = 76.3 \text{ in}$$

$$\frac{c}{\sin 27} = \frac{63.7}{\sin 56} \Longrightarrow c = \frac{63.7 \sin 27}{\sin 56} = 34.9 \text{ in}$$



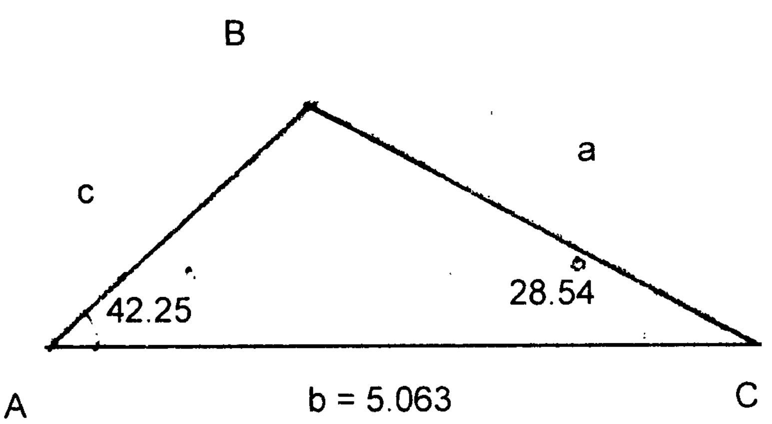
مثا ل سوم : مثلث را حل نمأيد ، که عناصر ذیل در آن داده شده باشند؟ شکل (١٥ ــــ ٣)

$b = 5.063$, $A = 42.25^\circ$, $C = 28.54^\circ$

لهذا ــ $B = 180^\circ - (A + C) = 109.21^\circ$

$$\frac{a}{\sin 42.25} = \frac{5.063}{\sin 109.21} \Longrightarrow a = \frac{5.063 (\sin 42.25)}{\sin 109.21} = 3.605$$

$$\frac{c}{\sin 28.54} = \frac{5.063}{\sin 109.21} \Longrightarrow c = \frac{5.063 (\sin 28.54)}{\sin 109.21} = 2.562$$



شکل (١٥ ــــ ٣)

هر گاه معلومات کافی بدسترس بوده باشد، ما میتوانیم با استفادهٔ از قانون ساین پرابلم های عملی علم فزیك را حل نمایم٠

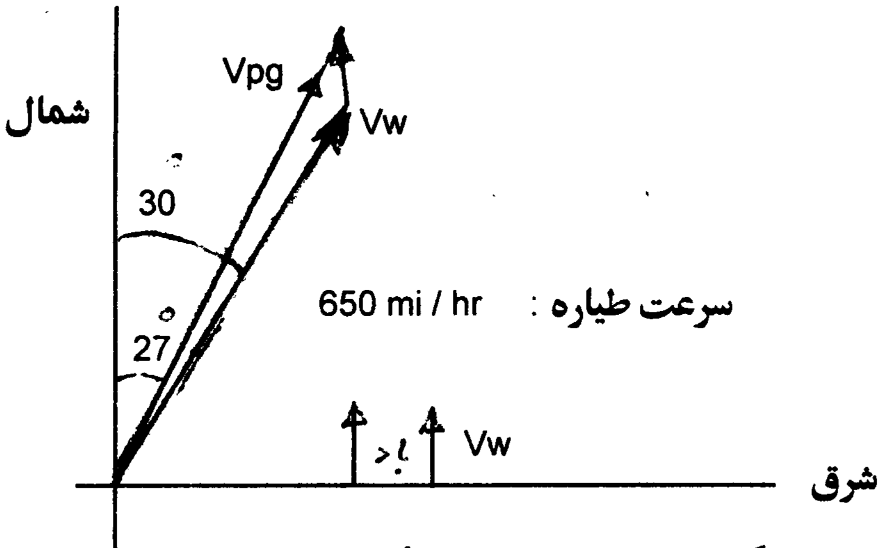
مثا ل چارم : یك طیاره نظر به هوا با سرعت، 650 میل فی ساعت به سمت شرق از شمال به زاویهٔ 30° درجه حرکت میکند ٠ باد از سمت جنوب میوزد ، و مسیر حرکت طیارهٔ را به زاویهٔ 27° درجه شرق از شمال تغیر میدیهد ٠ شما سرعت باد و سرعت طیاره را نظر به زمین معلوم نمأید ؟

حل : شکل (١٦ ــــ ٣) تمام معلومات را منعکس میسازد :

سرعت طیاره نظر به زمین ــــ Vpg و سرعت باد ــ Vw

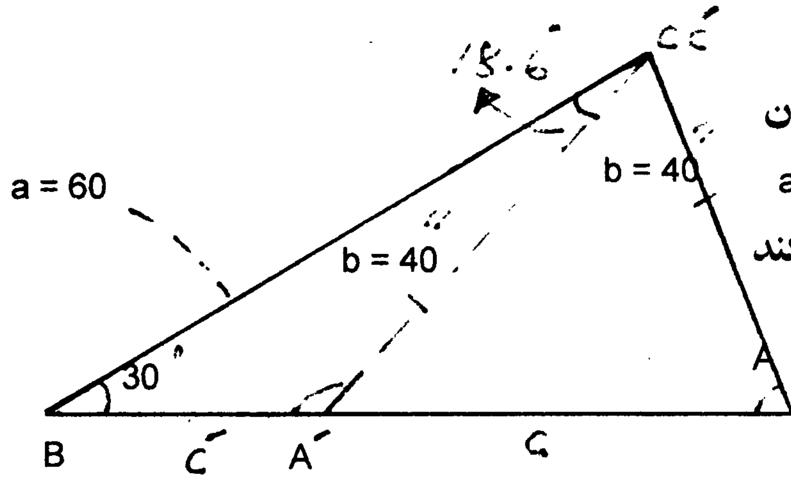
$$\frac{V_w}{\sin 3.0^\circ} = \frac{V_{pg}}{\sin 150.0^\circ} = \frac{650}{\sin 27^\circ}$$

$$V_w = \frac{650 (\sin 3^\circ)}{\sin 27} = 74.9 \text{ mi/hr} \qquad V_{pg} = \frac{650 (\sin 150^\circ)}{\sin 27} = 716 \text{ mill /hr}$$



شکل (١٦ ـــ ٣)

در این مبحث ، حل حالت دوم مثلث کیفی را در نظر میگیریم ۰ که دو ضلع و زاویهٔ مقابل این دو ضلع معلوم باشند ۰ (در همچو حالت امکانات ایجاد دو مثلث صدق میکند) ، شکل (١٧ ـــ ٣) بادقت مطالعه فرمأید ۰



شکل (١٧ ـــ ٣)

مثال پنجم : مثلث را حل نمأید که عناصر ذیل درآن معلوم باشند ؟ $a = 60$ in , $b = 40$ in , $B = 30^\circ$

حل : امکانات رسم مثلث که معلومات فوق را صدق کند در ترسیم شکل مقابل توضیح مینمأیم :

زاویهٔ مقابل ضلع a امکان دارد که A و یا $\acute{A}$ خواهد بود که هر دو حالت زاویهٔ مطلوب را تشریح مینمأید ۰

لهذأ ، دو مثلث داریم که ما متوانیم با استفاده از قانون ساین آنها را حل نمأیم ۰

(الف) اگر زاویهٔ A را در مقابل ضلع a در نظر بگیریم ، که دراینصورت زاویه A حاده میباشد ، چنین نوشته کرده میتوانیم :

$$\frac{60}{\sin A} = \frac{40}{\sin 30} \quad , \quad \text{یا} \Longrightarrow \sin A = \frac{60(\sin 30)}{40} = 0.7500$$

فلهذأ : با استفاده از قانون ساین داریم که : $A = 48.6^\circ$, $C = 101.4^\circ$

$$\frac{c}{\sin 101.4} = \frac{40}{\sin 30} \quad , \quad \text{یا} \Longrightarrow c = \frac{40(\sin 101.4)}{\sin 30} = 78.4 \text{ in}$$

$$\frac{60}{\sin \acute{A}} = \frac{40}{\sin 30} \qquad \sin \acute{A} = 0.7500 \, , \quad \acute{A} = 131.4^\circ , \quad A = 48.6^\circ$$

$$\frac{\acute{c}}{\sin 18.6^\circ} = \frac{40}{\sin 30^\circ} \quad , \quad \text{یا} \Longrightarrow \acute{c} = \frac{40(\sin 18.6)}{\sin 30} = 25.5 \text{ in}$$

$\acute{A} = 131.4^\circ$, $\acute{C} = 18.6^\circ$, $\acute{c} = 25.5$ in

تمرین (۵ ــ ۳)

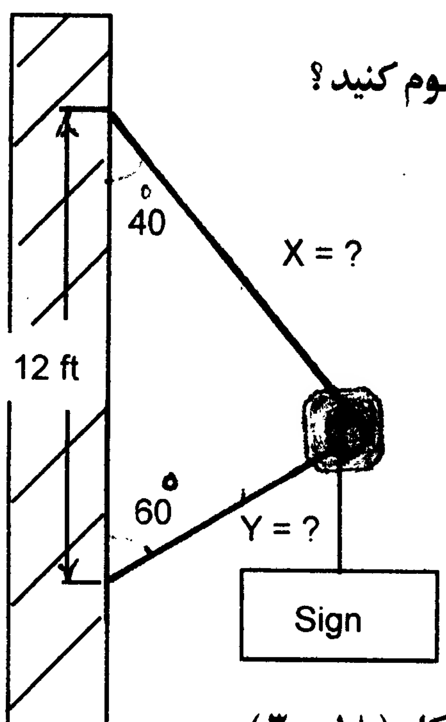
در تمرین های (۱ الی ۲۰)، بعضی عناصر مثلث ها داده شده اند، عناصر متباقی آنها را دریافت کنید ؟

1. a = 45.7, A = 65°, B = 49°
2. b = 3.07, A = 26°, C = 120°
3. c = 4380, A = 37.4°, B = 34.6°
4. a = 93.2, B = 17.9°, C = 82.6°
5. a = 4.601, b = 3.107, A = 18.23°
6. b = 3.625, c = 2.946, B = 69.37°
7. b = 77.52, c = 36.42, B = 20.73°
8. a = 150.4, c = 2509, C = 76.43°
9. b = 0.0742, B = 51°, C = 3.36°
10. c = 729, B = 121°, C = 44.18°
11. a = 63.8, B = 58.4°, C = 22.2°
12. a = 13, A = 55.2, B = 67.5°
13. b = 4.384, B = 47.43°, C = 64.56°
14. b = 283.2, B = 13.79°, C = 76.38°
15. a = 5.24, b = 4.446, B = 48.13°
16. a = 89.45, c = 37.36, C = 15.62°
17. b = 2880, c = 3650, B = 31.4°
18. a = 0.841, b = 0.965, A = 57.1°
19. a = 45, b = 126, A = 64.8°
20. a = 10, c = 500, C = 30°

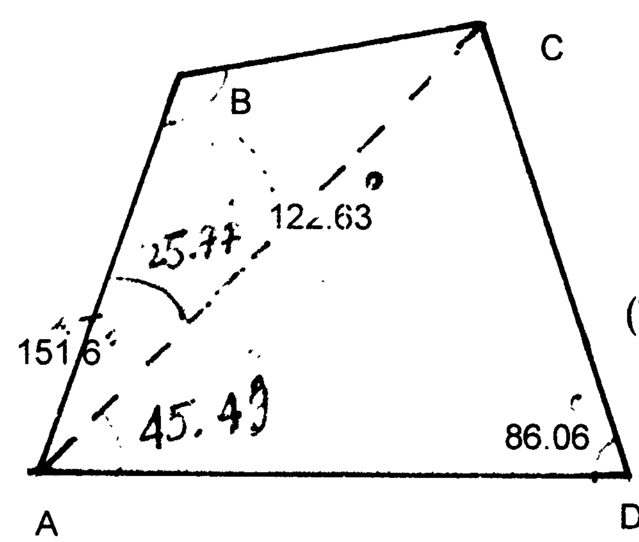
۲۱ ــ در شکل (۱۸ ــ ۳)، طول های مجهول را که برای آویزان کردن یك لوحه لازم است، دریافت نمأید ؟

X = ? , Y = ?

۲۲ ــ شکل (۱۹ ــ ۳)، یك چار ضلعی است. طول هر چار ضلع آنرا معلوم کنید ؟

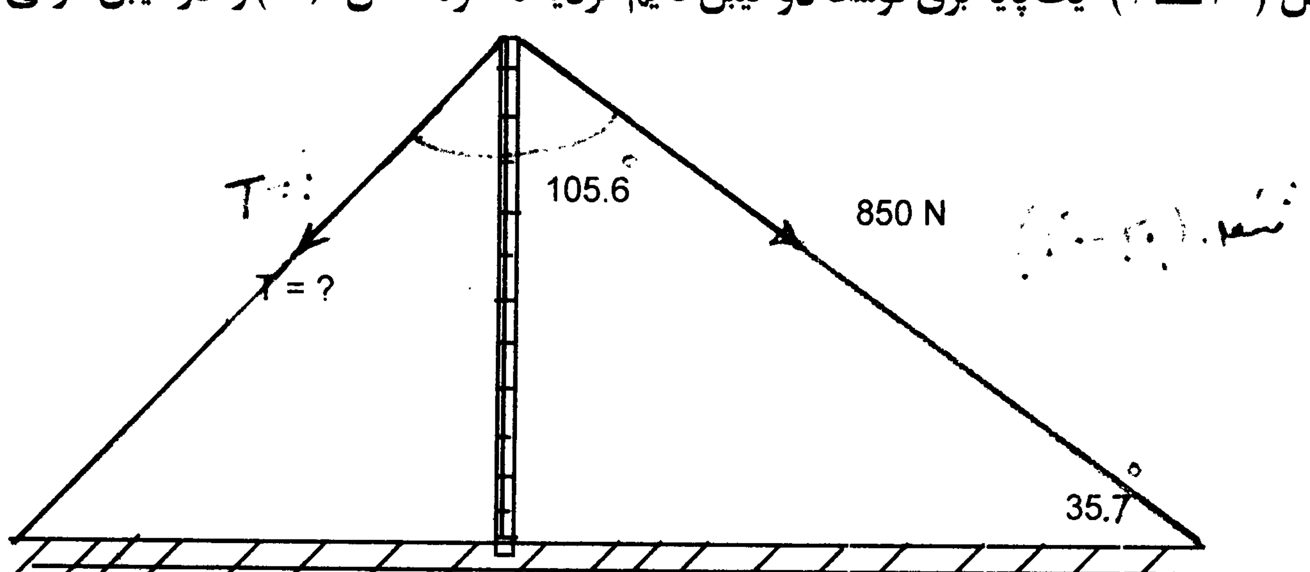


شکل (۱۸ ــ ۳)

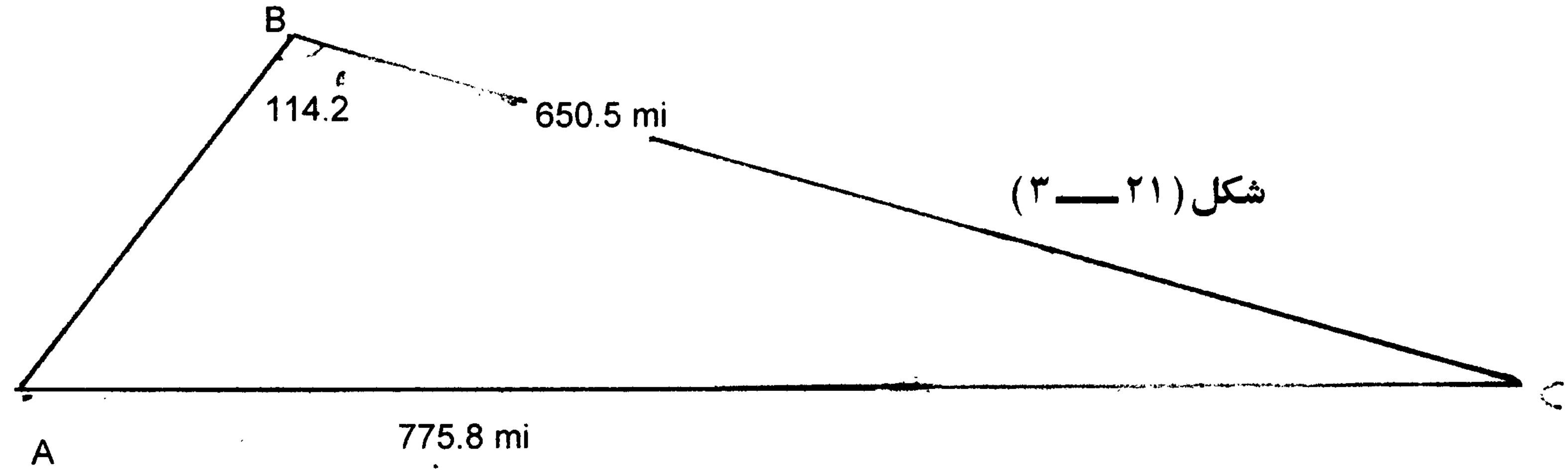


شکل (۱۹ ــ ۳)

۲۳ ــ در شکل (۲۰ ــ ۳)، یك پایهٔ برق توسط دو کیبل قائم گردیده، قوهٔ کشش (T) را در کیبل دومی دریافت کنید؟

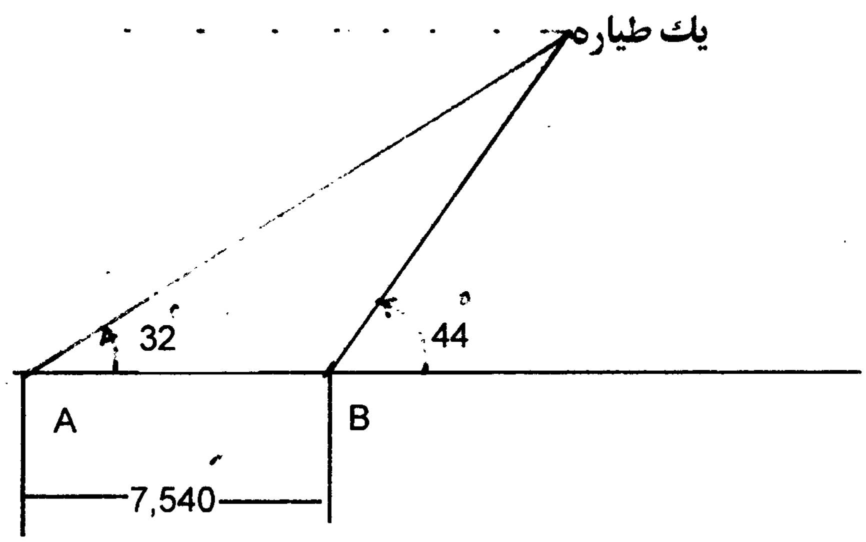


۲٤ ــ در شکل (۲۱ ــ ۳)، فاصله را از شهر A تا به شهر B معلوم کنید ؟



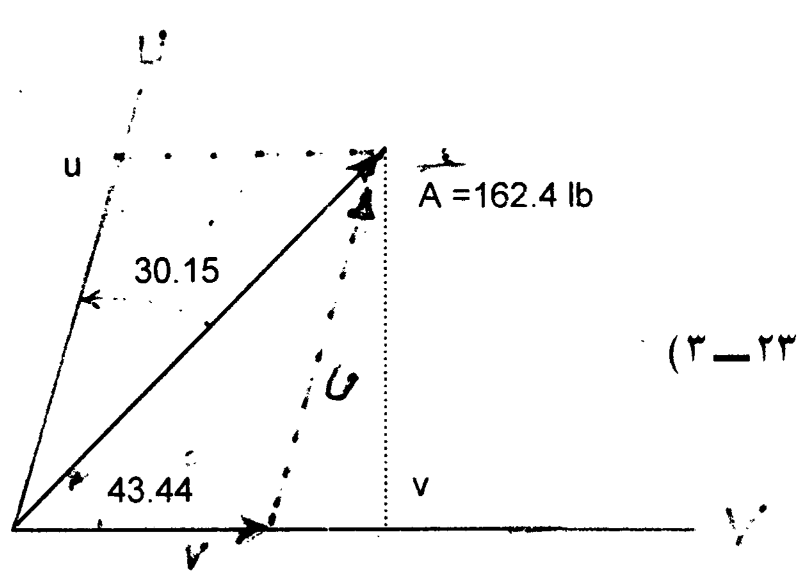
شکل (۲۱ ـــ ۳)

۲۵ ـــ زاویهٔ ایلیویشن از نقاط A و B که از هم دیگر 7,540 ft فاصله دارد ، در جهت مشا هدات یك طیاره ،با الترتیب 32° درجه و 44° درجه میباشند ۰ طیاره و هر دو نقطه همه دریك سطح شاقولی موقیعت دارند ۰معلوم کنید که نقطهٔ A از طیاره چقدر دورتر واقع است ؟
شکل (۲۲ ـــ ۳) ۰



شکل (۲۲ ـــ ۳)

۲٦ ـــ در شکل (۲۳ ـــ ۳) ، ویکتور $\bar{A}$ = 162.4 lb است ۰ شما این ویکتور را به دو جز u و v طوریکه در شکل نمایان است ، بدو ویکتور تجزیه نمأید ؟



شکل (۲۳ ـــ ۳)

۲۷ ـــ یك کشتی از یك بندر بطرف غرب شروع بحرکت می نماید ، و بعداً در یك نقطهٔ معین به زاویهٔ 31.5° درجه بطرف شمال از غرب بحرکت خود ادامه میدهد ۰ و به یك نقطهٔ که 63 mi از بندر مستقیماً فاصله دارد ، میرسد ۰ اگر فاصلهٔ دومی که کشتی ای مذکور طی کرده است 42 mi باشد ، معلوم کنید که نقطهٔ که کشتی دور خورده است ، از بندر چقدر دور واقع میباشد ؟

۲۸ ـــ شهر B به زاویهٔ 43.2° در جنوب از شرق شهر A واقع است ۰ پیلوتیکه میخواهد طیاره خود را از شهر A به سوی شهر B پرواز دهد ، به کدام سمت باید حرکت کند ، در صورتیکه باد به سرعت 40 km / h از طرف غرب می وزد ۰ و طیاره 300 km / h سرعت دارد ۰ مسیر حرکت طیاره را مشخص نمأید ؟

۲۹ ـــ یك قمر مصنوعی دستقیماً بالای امتداد مراکز مخابروی A و B موقیعت دارد ۰ این معلومات ، ذریعهٔ مخابرهٔ رادیوی دریافت شده است که قمر موصوف از مرکز A به زاویهٔ ایلیویشن 89.2° موقیعت دارد ۰ زاویهٔ ایلیویشن قمر مصنوعی از مرکز B 86.50° درجه میباشد ۰ اگر مراکز مخابراتی A و B از همدیگر به فاصلهٔ 1290 کیلو میتر دورتر واقع باشند ، قمر مصنوعی از نقطهٔ A چقدر دور است ؟ (کرویت زمین را در نظر نگیرید) ۰

۳۰ ـــ یك نفر یك پارچه زمین مثلث شکل را اندازه نموده است و راپور ذیل را ارایهٔ داشته است که :
یك ضلع زمین 58.4 فت وضلع دیگر آن 21.1 فت طول دارند ۰ زاویهٔ در مقابل ضلع کوتاه مثلث 24° درجه است ، شما ثابت نمأید که آیا این معلومات درست است یا خیر ؟

قانون کوساین

(Cosine Law)

در بخش اخیر درس گذشته تذکر داده شد ، که هرگاه حل مثلث تحت قواعد حالات سوم وچارم (۳ ، ٤) واقع گردد ، درانصورت حل مثلث از طریق قانون ساین (Sine Law) نا ممکن خواهد بود ۰ از اینرو لازم است تا یك طریقهٔ دیگر جستجو شود ۰ که یك عنصر مثلث را ذریعهٔ قانون کوساین معلوم کرده بتوانیم ۰ متباقی آنرا میتوان از طریق قانون ساین دریافت نمأیم ۰ ما این کار را از آن جهت انجام میدیهیم که قانون ساین آسانتر تطبیق شده میتواند ۰

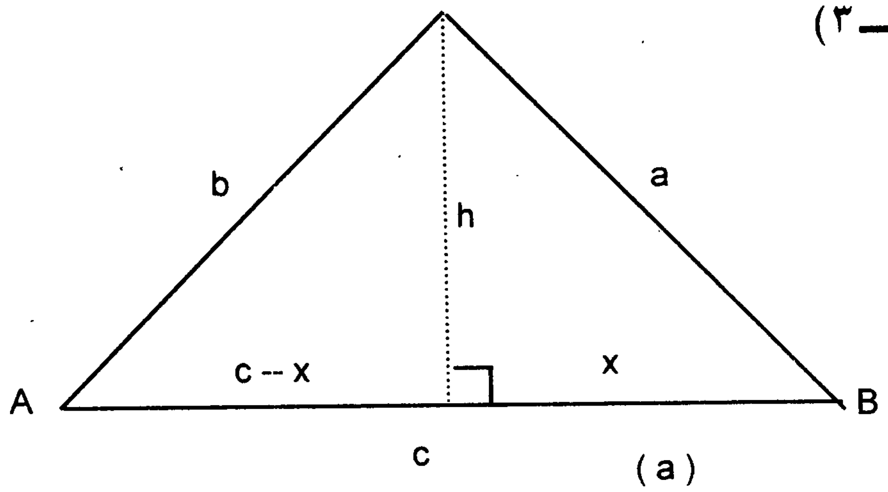
ـــــ ثبوت قانون کوساین :

یك مثلث کیفی (Oblique) را در نظر میگیریم : شکل (۲٤ ـــ ۳) ، میدانیم که در هر یك مثلث تابع ذیل را نوشته کرده میتوانیم : نوت :قضیهٔ فیثاگورین را در اینجا ه باری دیگر مطرح کرده ، از آن درین ثبوت استفاده مینمأیم :

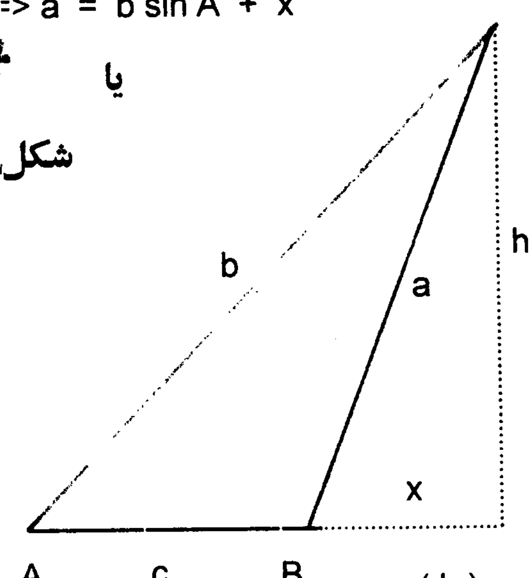
$\sin A = \frac{h}{b}$, ======> یا $h = b \sin A$, ===> $a^2 = h^2 + x^2$, =====> $a^2 = b^2 \sin^2 A + x^2$

$x^2 + y^2 = r^2$ یا

شکل (۲٤ ـــ ۳)



(a)



(b)

مطابق شکل (۲۴ـ۳) (a) $c - x = b\cos A$, or ===> $x = c - b\cos A$

همچنان : $a^2 = h^2 + x^2$, =====> $h = b\sin A$

از معادلات و روابط فوق داریم : $a^2 = h^2 + x^2 = (b\sin A)^2 + (c - b\cos A)^2$

$$a^2 = b^2\sin^2 A + c^2 - 2bc\cos A + b^2\cos^2 A = b^2(\sin^2 A + \cos^2 A) + c^2 - 2bc\cos A$$

چون ، $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

لهذا ، $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

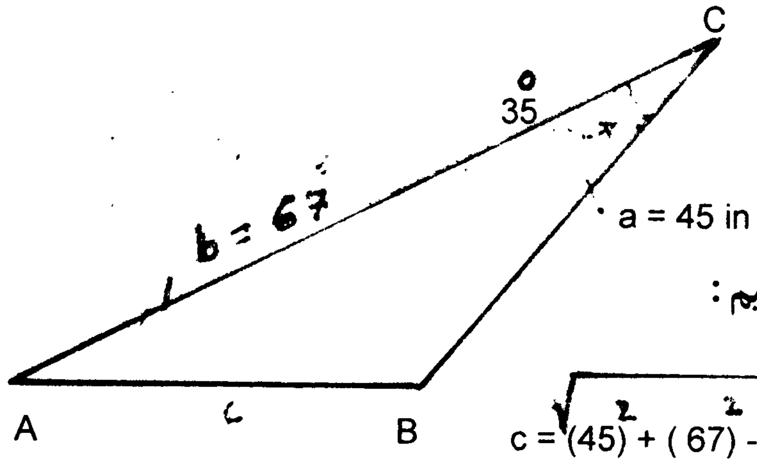
وهمچنان ، اگر از دو زاویهٔ دیگر A و B مثلث شکل (۲۴ـــ۳) بالترتیب عمود ها را بالای اضلاع مقابل آن رسم نمأیم ، فورمول های دیگر نیز ثبوت شده میتواند ٠

قانون کوساین:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

مثال الف : در شکل ذیل ، دو ضلع وزاویهٔ مابینی آن داده شده است ٠ اجزأ دیگر مثلث را پیدا کنید ؟

$a = 45$ in , $b = 67$ in , $C = 35^\circ$



حل : مطابق قانون کوساین از قرار c نوشته کرده میتوانیم :

$$c = \sqrt{(45)^2 + (67)^2 - 2(45 \times 67)\cos 35} = 39.7 \text{ in}.$$

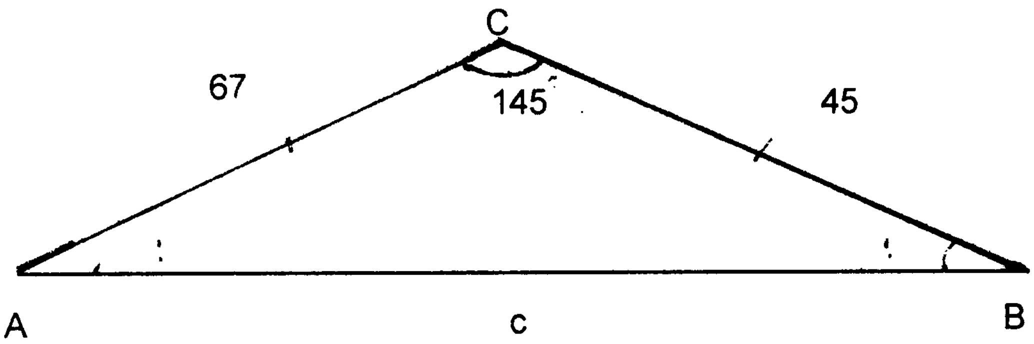
حال ، بااستفاده از قانون ساین ، نوشته کرده میتوانیم:

قانون ساین $\frac{45}{\sin A} = \frac{67}{\sin B} = \frac{39.7}{\sin 35}$

زاویای داخلی یك مثلث 180 درجه میشود ، لهذا :

$\sin A = 0.6501$, $A = 40.6^\circ$, $B = 104.4^\circ$

مثال دوم : در مثال اول اگر قیمت زاویهٔ $C = 145^{\circ}$ درجه باشد ، که شکل (۲٦ــ ۳) بدست میآید ۰ قیمت های A و B را دریافت کنید ؟



شکل (۲٦ ــ ۳)

حل : در شکل (۲٦ــ ۳) :

مطابق قانون کوساین چنین نوشته کرده میتوانیم :

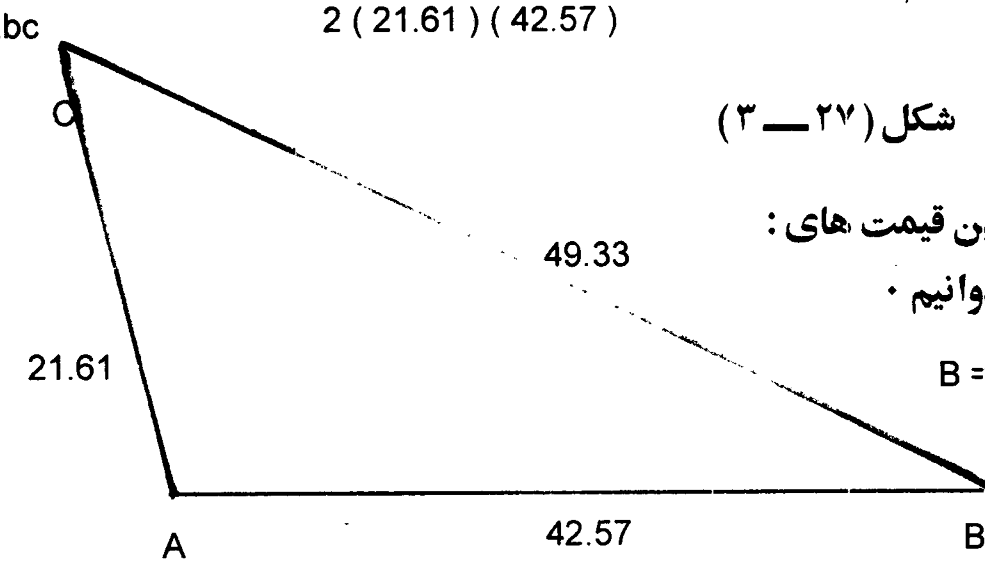
$c = \sqrt{(45)^2 + (67)^2 - 2(45)(76)\cos 145^{\circ}} = ?$, $c = 107$ in , $A = 14^{\circ}$, $B = 21^{\circ}$

مثال سوم : مثلث را حل نمأید که سه ضلع آن معلوم باشند ؟

$a = 49.33$ in , $b = 21.61$ in , $c = 42.57$ in, <==== شکل (۲۷ ــ ۳)

حل : مطابق قانون کوساین نوشته کرده میتوانیم :

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(21.61)^2 + (42.57)^2 - (49.33)^2}{2(21.61)(42.57)} = -0.08384 \ , \ A = 94.81^{\circ}$$

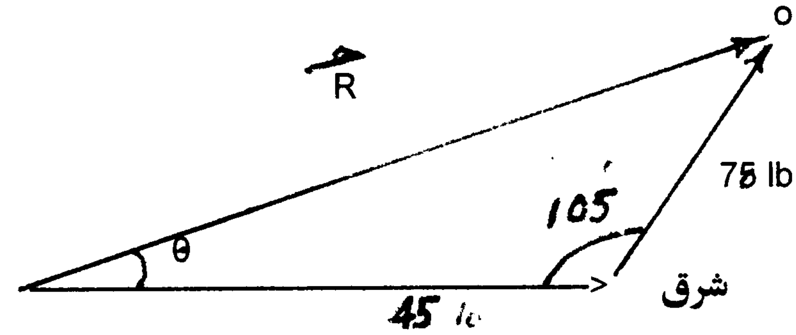


شکل (۲۷ ــ ۳)

حال ، نظر به قانون ساین قیمت های :
B و C را پیدا کرده میتوانیم ۰

$B = 25.88^{\circ}$, $C = 59.31^{\circ}$

مثال چارم : محصلهٔ دو ویکتور را که مقدار آن با الترتیب : 78 lb و 45 lb میباشند ، مطابق شکل ذیل دریافت کنید ؟ ویکتور اولی بسمت شرق عمل کرده و ویکتور دومی با ویکتور اولی زاویهٔ 105 درجه میسازد ؟



شکل (۲۹ ــ ۳)

$R = \sqrt{(78.0)^2 + (45)^2 - 2(78)(45)(\cos 105^{\circ})} = 99.6$ lb , $\theta = 25.9^{\circ}$ <== از طریق قانون ساین

مطابق قانون کوساین ، داریم

یا به عباره دیگر : قیمت های دو نقطهٔ (P) و (Q) بالای خط (r) را در تناسب فوق تعویض می نمائیم که در نتیجه رابطه ٔ ذیل بدست می آید : $(Y/X = b/a)$

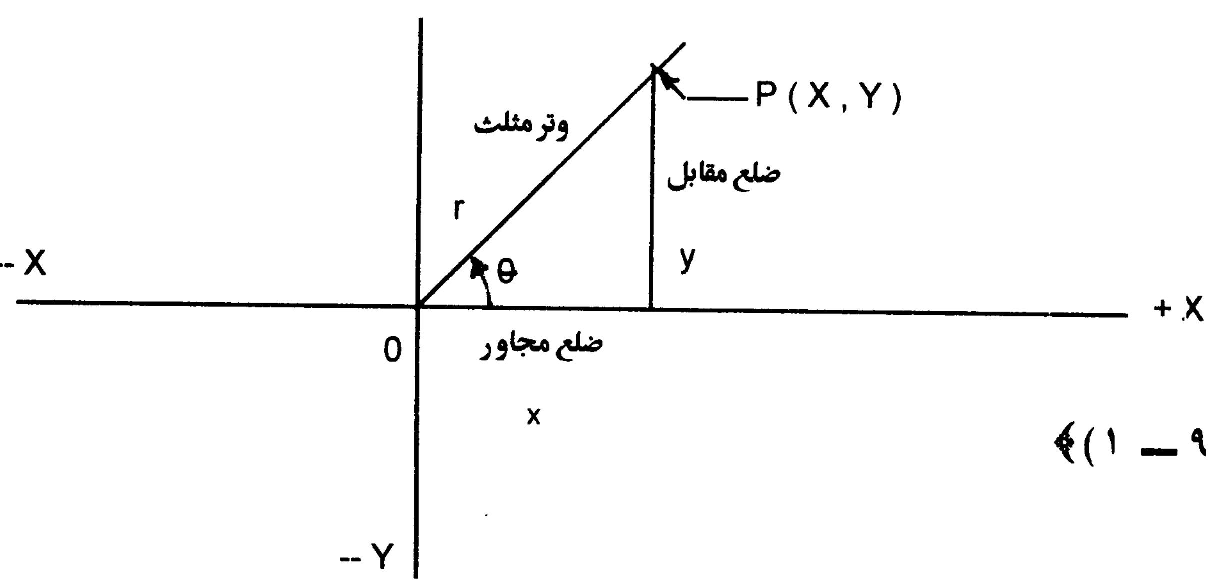
نسبت آردینت (Ordinate) و ابسیسا (Abscissa) برای زاویهٔ (θ) بالای هر نقطهٔ وتر ، عبارتست از : (Y/X)

حال ، برای زاویهٔ کیفی (θ) که در حالت ستندارد واقع شده است و از نقطهٔ $P (X , Y)$ ، طول ویکتور شعاع ، یك عمود بالای محور (X) رسم مینمائیم ۰ نظر به طول های سه ضلع مثلث ، شش نسبت مختلف را برقرارمی نمایم و بنأ به مشابه بودن مثلث ها ،این نسبت ها ی هر دو مثلث با هم مساوی میباشند بدون آنکه وتر مشخص باشد۰

برای زاویه های مختلف ، با داشتن وتر های متفاوت۔ قیمت های گونا گون بدست می آید ۰ علامه مثبت ویا منفی نسبت ها مربوط به موقعت وتر مثلث است که در کدام ربع مو قعت دارد۰ مقدار نسبت ها ی مذکور مربوط به اندازهٔ زاویه یعنی تابع زاویه است، و این توابع را به نام (**توابع مثلثا تی**) یاد میکنند که در شکل (۹ــ ۱) ارأیه گردیده است۰

$$\text{SINE } \theta = \frac{\text{طول ضلع مقابل زاویه}}{\text{طول وتر مثلث}} \qquad \text{COSINE } \theta = \frac{\text{طول ضلع مجاور زاویه}}{\text{طول وتر مثلث}} \qquad \text{TANGANT } \theta = \frac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{طول ضلع مجاور}}$$

$$\text{COSECANT } \theta = \frac{1}{\text{SINE } \theta} \qquad \text{SECANT } \theta = \frac{1}{\text{COSINE } \theta} \qquad \text{COTANGANT } \theta = \frac{1}{\text{TANGANT } \theta}$$



﴿ شکل (۹ ــ ۱) ﴾

درین فصل ما توجه خود را صرف به توابع مثلثاتی زاویه های (حاده) معطوف میداریم ، در حالکه تعریفات فوق (توابع مثلثاتی) برای هر زاویه که در هر ربع باشد، صدق میکند۰ جهت سهولت موضوع، تعریفات توابع راطوری خلاصه قرار ذیل تشریح مینما ئیم :

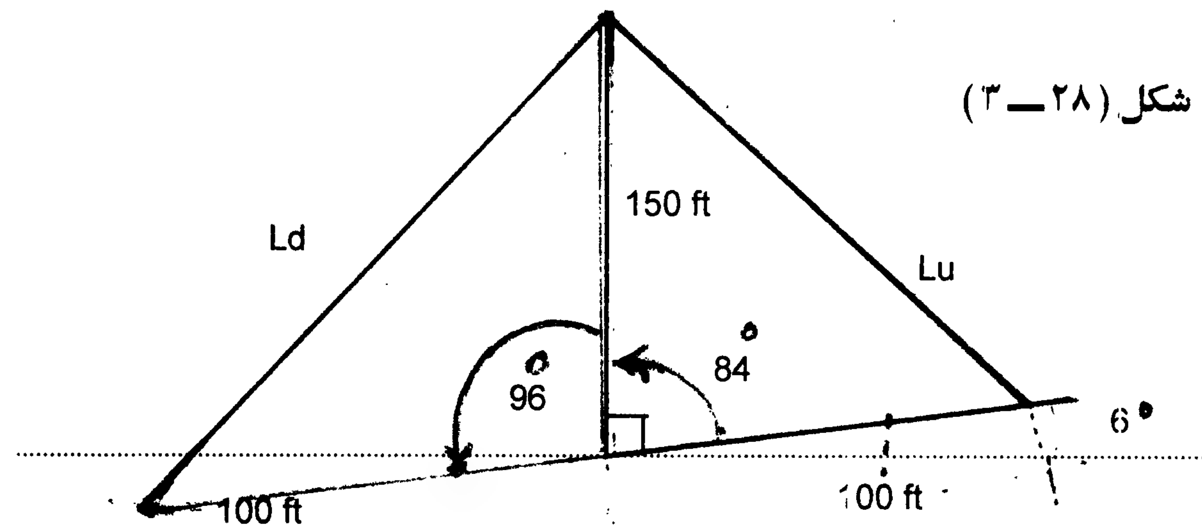
$$\text{SINE } \theta = \frac{y}{r} \qquad \text{COSINE } \theta = \frac{x}{r} \qquad \text{TAN } \theta = \frac{y}{x}$$

$$\text{CSC } \theta = \frac{r}{y} \qquad \text{SECANT } \theta = \frac{r}{x} \qquad \text{COT } \theta = \frac{x}{y}$$

تعریف توابع شش گا نه مثلثاتی که در شکل (۹ــ ۱) ارائه شده ، اساس علم مثلثات را بنیان میگذارد۰ درتعریفات فوق اگر مخرج کسر صفر شود ۰ قیمت آن توابع (لایتنا هی) یا نامحدود میشود۰ چنانچه قیمت (tan θ) و (sec θ) به قیمت لایتنا هی (∞) میرسد وقتیکه قیمت (X) مساوی به صفر شود (در مورد زاویهٔ (۹۰°، درجه) ۰ و همچنان در مورد (cot θ) ، و (csc θ) قیمت تابع لایتناهی (∞) میشود ، وقتیکه قیمت (Y) مساوی به صفر شود ، (مثلأ در مورد زاویهٔ صفر درجه) ۰ بخاطر داشته باشید که قیمت (r) همیش مثبت است زیرا قیمت (r) دایمأ بزرگتر است از صفر($r > 0$) ۰ در حالیکه قیمت های (X) و (Y) امکان دارد که قیمت های صفر بگیرند۰ مثلأ در مورد زاویه های (90°) و (0°) ، اما (r) به هیچ صورت صفر شده نمیتواند۰ زیرا هنگامیکه (r) قیمت صفر بگیرد ،درآن صورت هیچ یك زاویه تشکیل نمیشود۰

در مثال های ذیل ، ما قیمت های مشخص توابع مثلثاتی را دریا فت خواهیم کرد، اما فراموش نبا ید کرد که قیمت ها

مثال پنجم : یك آنتن رادیو بالای یك تپه که زاویهٔ 6 درجه را با سطح افقی میسازد ، نصب گردیده است ۰ اگر دو کیبل کشش (Guy wirea) به ارتفاع 150 ft در انجام آنتن به فاصلهٔ 100 ft دورتر از قاعده آنتن جهت حفظ توازن آن بکار برده شده است ۰ شما طول این دو عدد کیبل که یکی آن در بالای تپه و دیگر آن در پأین تپه نصب میگرددند ، دریافت کنید ؟ شکل (۲۸ — ۳)



حل : مطابق قانون کوساین نوشته کرده میتوانیم

$$Lu = \sqrt{(100)^2 + (150)^2 - 2(100)(150)\cos 84^\circ} = 171 \text{ ft}$$ =====> طول کیبل اول

$$Ld = \sqrt{(100)^2 + (150)^2 - 2(100)(150)\cos 96^\circ} = 189 \text{ ft}$$ =====> طول کیبل دوم

﴿ تمرین د رجهت تطبیق قانون کوساین ﴾

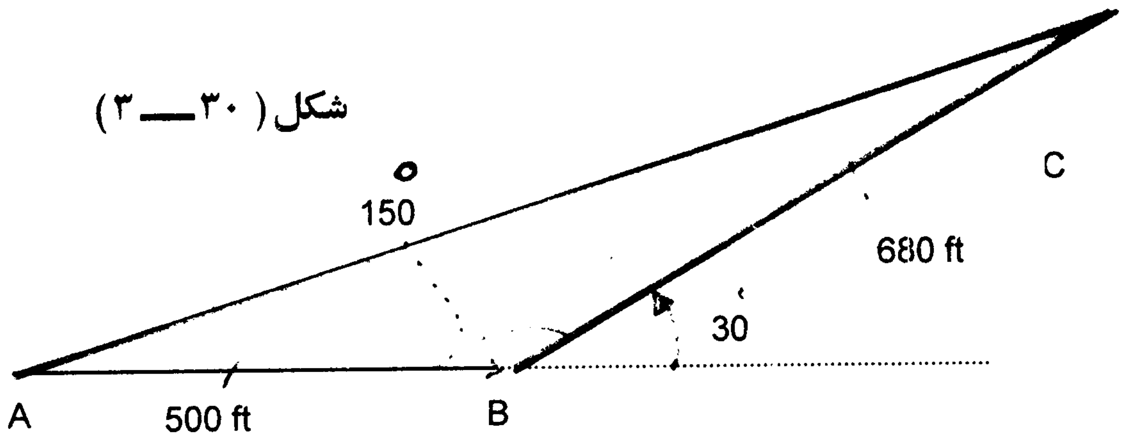
از تمرین (۱ الی ۲۰) اجزأ مجهول مثلث ها را دریافت کنید ؟

1. $a = 6$, $b = 7.56$, $C = 54^\circ$
2. $b = 87.3$, $c = 34$, $A = 130^\circ$
3. $a = 453$, $b = 924$, $C = 98^\circ$
4. $a = 0.0845$, $c = 0.116$, $B = 85^\circ$
5. $a = 39.53$, $b = 45.22$, $c = 67.15$
6. $a = 23.31$, $b = 27.26$, $c = 29.17$
7. $a = 385.4$, $b = 467.7$, $c = 88.9$
8. $a = .2433$, $b = 0.2635$, $c = 0.1538$
9. $a = 320$, $b = 847$, $C = 158^\circ$
10. $b = 18.3$, $c = 27.1$, $A = 58.07^\circ$
11. $a = 21.4$, $c = 4.28$, $B = 86.3^\circ$
12. $a = 11.3$, $b = 5.10$, $C = 77.6^\circ$
13. $a = 103.7$, $c = 159.1$, $C = 104.67^\circ$
14. $a = 49.32$, $b = 51.55$, $B = 114.36^\circ$
15. $a = 4937$, $b = 0.5956$, $c = 0.6398$
16. $a = 69.72$, $b = 49.30$, $c = 56.29$
17. $a = 723$, $b = 598$, $C = 158^\circ$
18. $a = 1.78$, $b = 6.04$, $c = 4.80$
19. $a = 15.6$, $A = 15.1$, $B = 150.5^\circ$
20. $a = 17.5$, $b = 24.5$, $c = 37$

سوالات عبارتی : —— با استفاده از قانون کوساین سوالات ذیل را حل کنید ؟

۲۱ —— جهت پیمایش فاصلهٔ AC یك خانم به اندازهٔ 500ft از نقطهٔ A تا نقطهٔ B پیاده روی میکند ۰ بعداً به زاویهٔ 30° درجه به سمت C دور میخورد ۰ از نقطهٔ B تا نقطهٔ C ، باری دیگر پیاده روی میکند ۰ فاصلهٔ AC را دریافت کنید؟ شکل (۳۰ — ۳)

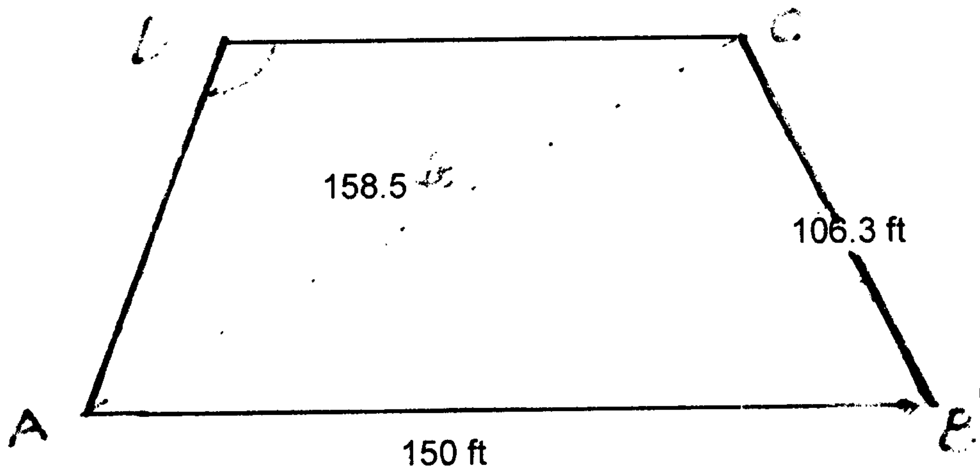
شکل (۳۰ ـــ ۳)



۲۲ ـــ یك طیاره به سرعت 700 کیلو میتر فی ساعت میدان را هنگام چاشت (۱۲ بجه) به سمت شرق ترك میگوید · ساعت دو بجه بعد از ظهر پیلوت به زاویهٔ 10 درجه طرف شمال از شرق دور میخورد طیاره موصوف در ساعت سه بعد از ظهر از میدان طیاره چقدر دورتر خواهد بود ؟

۲۳ ـــ جهت پیپ کاری از خاطر مانع که در پیشروی می آید ، پیپ تیل به دو مسیر مستقیم و مختلیف دوانده میشود · که یکی آن 3.756 کیلو میتر و دیگر آن 4.675 کیلومیتر طول دارد · زاویه در نقطهٔ جاینت آن ها 168.85 درجه است · شما دریافت نمأید که چقدر پایپ اضافی در این سیستم پایپ کاری مصرف شده است ؟

۲٤ ـــ تختهٔ روی یك میز به شکل ذوذ نقه ، متساوی الساقین میباشد · شکل (۳۱ ـــ ۳) ، زاویه های بین اضلاع آن چند میشوند ؟



شکل (۳۱ ـــ ۳)

۲۵ ـــ دو قوه با الترتیب ، 56.14 lb و 67. 42 lb میباشند · که محصلهٔ آنها 82.26 lb میشود · زاویه بین این دو قوه چند درجه خواهد بود ؟

۲٦ ـــ دریك فریم فلزی مثلث ـ شکل ، سه ضلع آن با الترتیب : 8 ft ، 12 ft و 61 ft میباشند · بزرگترین زاویهٔ این مثلث را دریافت کنید ؟

۲۷ ـــ یك کشتی در آب استا ده به سرعت 6 ft کیلو میتر فی ساعت حرکت میکند · کشتی موصوف هم جهت جریان آب دریا به زاویهٔ 20 درجه نظر به ساحل دریا سرعت میگیرد · اگر سرعت جریان آب دریا 3 کیلو میتر فی ساعت باشد ، کشتی به کدام سرعت حرکت میکند و سمت حرکت آن به کدام جهت خواهد نمود ؟ °

۲۸ ـــ سرعت یك طیاره نظر به هوا 520 میل فی ساعت است · و به زاویهٔ 24 درجه به طرف شمال از غرب حرکت میکند · باد از سمت جنوب غرب به سرعت 55 میل فی ساعت می وزد · سمت حقیقی طیاره کدام است ، و سرعت طیاره نظر به زمین چند خواهد بود ؟

۲۹ ـــ یك پایهٔ برق که 13.15 میتر طول دارد ، یك انجام آن از محل یك مشاهده کننده به اندازهٔ 15.72 میتر ، و انجام دیگر آن به اندازهٔ 19.33 میتر از محل مذکور فاصله دارد · مشاهده کننده پایهٔ موصوف را به چند درجه زاویه میبند ؟

۳۰ ـــ یك زمین مثلث ـ شکل ذریعهٔ یك دیوار سنگی که طول آن 134.12 ft بوده و توسط سرك به طول 205.07 ft و همچنان یك کتارهٔ که طول آن 147.25 ft میباشد ، احاطه شده است · زاویهٔ که کتاره با سرك میسازد ، چند درجه خواهد بود ؟

سوالات عبارتی و عملی

در تمرین (۱ الی ٤)، ویکتور های قوه داده شده است، مرکبهٔ های آن را بالای محور X و Y دریافت کنید؟

1. $\vec{A} = 65\ lb,\ \theta a = 28^\circ,$ 2. $\vec{A} = 8.05\ lb,\ \theta a = 149^\circ,$ 3. $\vec{A} = 0.9204,\ \theta a = 215.59^\circ$

4. $\vec{A} = 657.1,\ \theta a = 343.74$

۲ــــ از سوال (٥ الی ۸)، دو- دو ویکتور داده شده، طوریکه بالای همدیگر قایم اند. مقدار و سمت محصلهٔ آن ها را دریافت نمأید؟

5. $\vec{A} = 327\ lb,\ \vec{B} = 505\ lb$ 6. $\vec{A} = 684\ lb,\ \vec{B} = 295\ lb$

7. $\vec{A} = 4964\ lb,\ \vec{B} = 3298\ lb$ 8. $\vec{A} = 26.52\ lb,\ \vec{B} = 89.86\ lb$

۳ــــ از سوال (۹ الی ۱٦)، ویکتور های ارأیه شده را با استفاده از توابع مثلثاتی و قضیهٔ فیتا گورین، با هم جمع نمأید؟

9. $\vec{A} = 780,\ \theta a = 28^\circ$; $\vec{B} = 346,\ \theta b = 320^\circ$

10. $\vec{A} = 0.0120,\ \theta a = 10.5^\circ$; $\vec{B} = 0.0078,\ \theta b = 260^\circ$

11. $\vec{A} = 22.51,\ \theta a = 130.16^\circ$; $\vec{B} = 7.604,\ \theta b = 200.09^\circ$

12. $\vec{A} = 70.31,\ \theta a = 110.93^\circ$; $\vec{B} = 4835,\ \theta b = 350.20^\circ$

13. $\vec{A} = 51.33,\ \theta a = 12.25^\circ$; $\vec{B} = 42.61,\ \theta b = 291.77^\circ$

14. $\vec{A} = 70.31,\ \theta a = 122.54^\circ$; $\vec{B} = 30.29,\ \theta b = 350.20^\circ$

15. $\vec{A} = 75,\ \theta a = 15^\circ$; $\vec{B} = 26.5,\ \theta b = 192.4^\circ$; $\vec{C} = 54.8,\ \theta c = 344.7^\circ$

16. $\vec{A} = 8100,\ \theta a = 141.9^\circ$; $\vec{B} = 1540,\ \theta b = 165.2^\circ$; $\vec{C} = 3470,\ \theta c = 296^\circ$

٤ــــ از سوال (۱۷ الی ۳٦)، مثلث های ارائه شده را حل نمأید؟

17. $A = 48^\circ,\ B = 68^\circ,\ a = 14.5$ 18. $A = 132^\circ,\ b = 7.5\ \ C = 32^\circ$ 19. $a = 22.8,\ B = 33.5^\circ,\ C = 8.42^\circ$

20. $A = 71^\circ,\ B = 154.16^\circ,\ c = 7863$ 21. $A = 17.85^\circ,\ B = 154.16^\circ,\ c = 7863$

22. $a = 1.985,\ b = 4.189,\ c = 3.652$ 23. $b = 76.07,\ c = 40.53,\ B = 110.09^\circ$

24. $A = 77.06^\circ,\ a = 12.07,\ c = 5.104$ 25. $b = 14.5,\ c = 13,\ C = 56.6^\circ$

26. $B = 40.6^\circ,\ b = 7,\ c = 18$ 27. $a = 186,\ B = 130^\circ,\ c = 106$

28. $b = 750,\ c = 1100,\ A = 56^\circ$ 29. $a = 7.86,\ b = 2.45,\ C = 22^\circ$

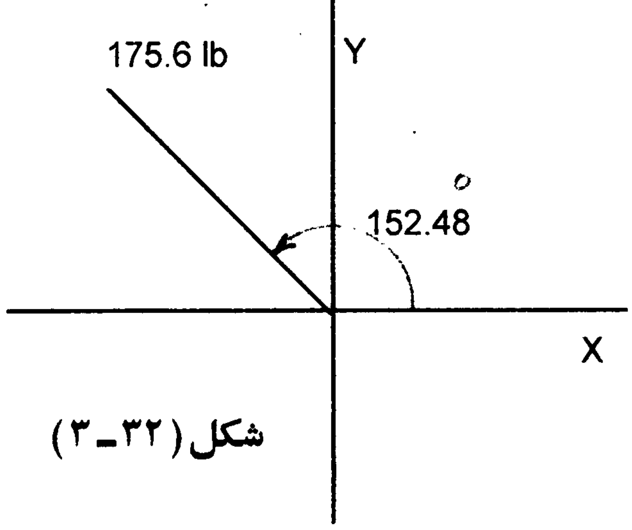
30. $a = 0.208,\ c = 0.697,\ B = 105.4^\circ$ 31. $A = 67.16^\circ,\ B = 96.84^\circ,\ c = 532.9$

32. $A = 43.12^\circ,\ a = 7.893,\ b = 4.113$ 33. $a = 17.01,\ b = 12.62,\ c = 25.95$

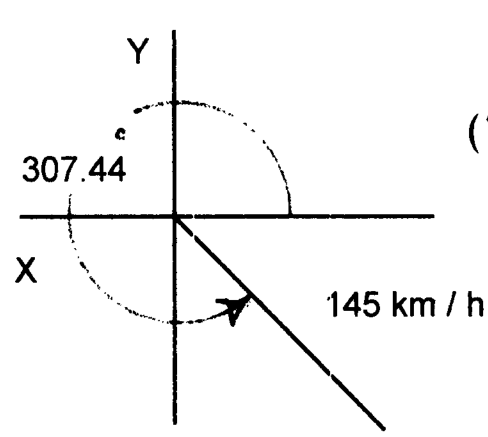
34. $a = 9064,\ b = 9953,\ c = 1106$ 35. $a = 5.30,\ b = 8.75,\ c = 12.5$

36. $a = 47.4,\ b = 40,\ c = 45.5$

۳۷-۳۸ــــ مرکبهٔ عمودی، و افقی قوهٔ که در اشکال (۳۲ و ۳۳ــ ۳) ارأیه شده، دریافت نمأید؟



شکل (۳۲ـ۳)



شکل (۳۳ــ ۳)

۳۹ــــ یك طیاره جیت به زاویهٔ 35 درجه اززمین بلند میشود در صورتیکه به سرعت 600 km / hr. حرکت دارد ۰ زمان t را پیدا کنید که طیاره ارتفاع 10,000 میتر بگیرد ؟

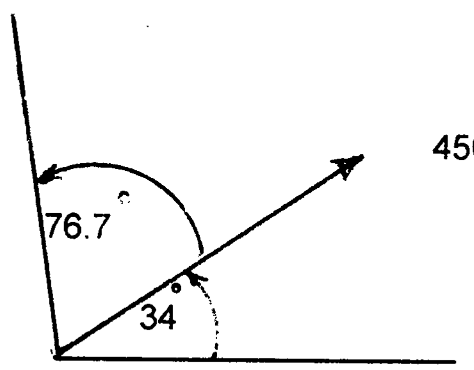
۴۰ــــ یك مرمی به زاویهٔ ۲۵° درجه ، نظر به زمین فیر گردیده است ۰ اگر سرعت مرمی 2,000 میل فی ساعت بوده باشد ، مرکبهٔ عمودی این سرعت را دریافت کنید ؟

۴۱ــــ یك بالون به سرعت 15 ft / sec از زمین بلند میشود ، و بعداً به سرعت 22.5 ft / sec ذریعهٔ باد به مسیر افقی رانده میشود۰ محصلهٔ هر دو سرعت را دریافت نمأید ؟

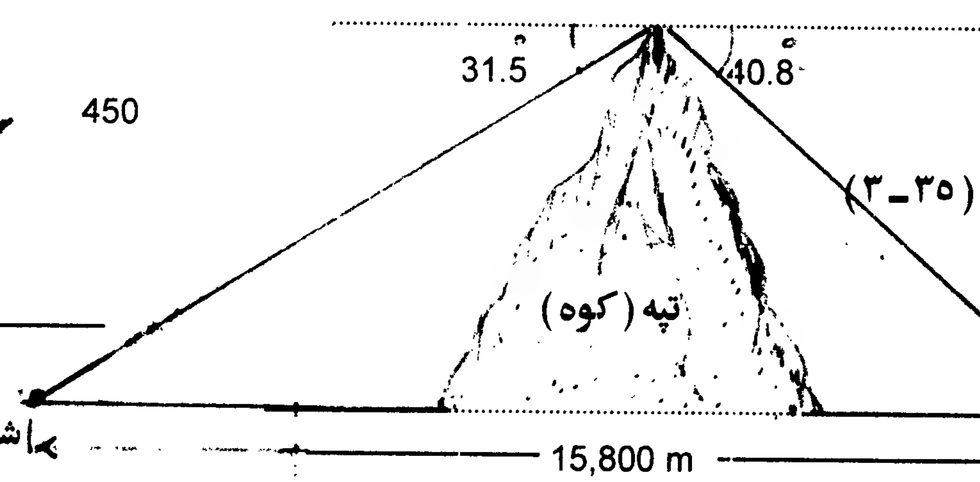
۴۲ــــ یك کشتی در آب استاده به سرعت 8 km / hr حرکت کرده است ۰ اگر این کشتی از یك دریا یکه سرعت جریان آب آن 3 km / hr. است ، مستقیماً عبور کند ، محصلهٔ سرعت کشتی و دریا را دریافت کنید ؟

۴۳ــــ حاصل جمع دوسرعت ، 450 میل در فی ساعت میباشد ، که با یکی از مرکبه های خود زاویهٔ 34° درجه و همچنان با مرکبهٔ دومی زاویهٔ 76.7° درجه میسازد، شکل (۳۴ــــ ۳) ۰ مقدار هر یك مرکبه را دریافت نمأید ؟

۴۴ــــ یك نفر ، بالای یك تپه دو جسم را در روی زمین طوری مشا هده میکند ، که اجسام مذکور بدو طرف وی موقعیت دارند۰ زاویهٔ دیپریشن با یك جسم 31.5° درجه و با طرف مخالف خویش زاویهٔ دیپریشن 40.8° درجه میشود ۰ اگر اجسام موصوف از یکدیگر به فاصلهٔ 15,800 میتر دور واقع باشند ، شکل (۳۵ــــ ۳) ۰ معلوم کنید که شخص مذکور از جسم نزدیکتر چقدر فاصله دارد ؟



شکل (۳۴ــــ ۳)

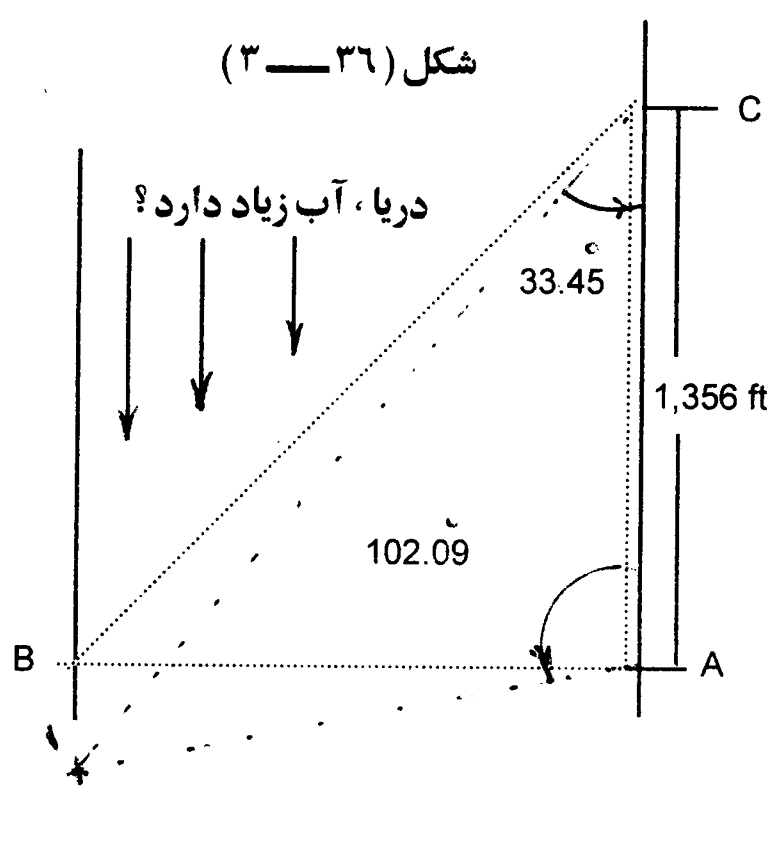


شکل (۳۵ــــ ۳)

۴۵ــــ برای آنکه فاصله بین دو نقطه در دو طرف دریا را پیدا کرده بتوانیم ، فاصلهٔ AC را اندازه نمودیم که 1,356 ft است ۰ نقطهٔ C درهمان ساحل دریا موقعیت دارد که نقطهٔ A موقعیت دارد ۰ زاویهٔ BAC مطابق اندازه‌گیری 102.09 درجه و زاویه ACB مساوی میشود به 33.45° درجه ۰ حال ، شما با استفادهٔ علم مثلثات ، فاصله بین نقاط A و B را دریافت کنید ؟ شکل (۳۶ــــ ۳) ۰

عرض دریا چند است ؟

شکل (۳۶ــــ ۳)



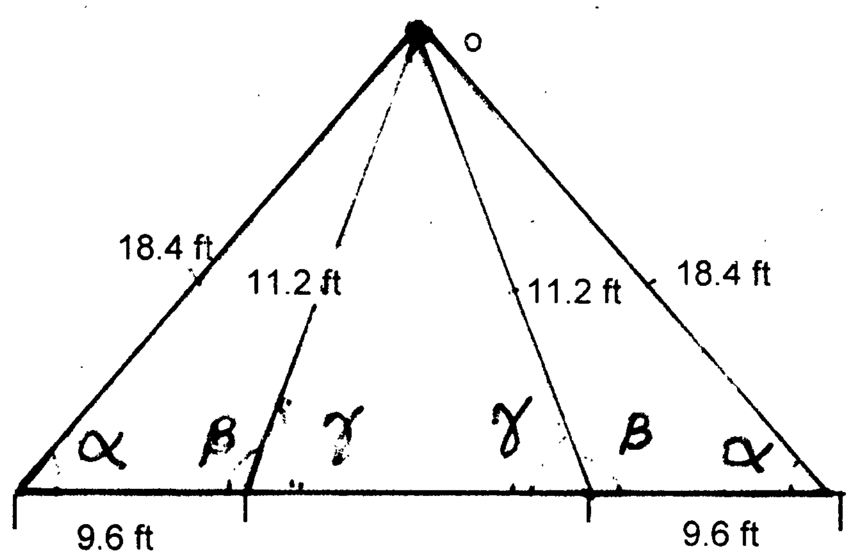
۴۶ ــ یك زینه که طول آن 22 ft است ، بر یك دیوار طوری گذاشته شده که با دیوار موصوف ، زاویهٔ 29 درجه میسازد ۰ اگر قاعدهٔ زینه از زیر دیوار به اندازهٔ 10.7 ft دور واقع باشد ، زاویهٔ ایلیویشن دیوار با زمین چند درجه خوهد شد ؟

۴۷ ــ دو نقطه ایلیویشن از نقطهٔ سوم 117.1 میتر و 88.16 میتر فاصله دارند ۰ خطوطیکه دو نقطه اولی و نقطهٔ سومی را با هم وصل مینماید در نقطهٔ سومی به زاویهٔ 115.58 درجه ملاقی میشوند ۰ دو نقطهٔ اولی از هم دیگر چقدر دور واقع اند ؟

۴۸ ــ یك کریت توسط دو ریسمان از یك نقطه در هوا آویزان گردیده است ۰ این ریسمان ها باالترتیب ، 14.5 m و 10.5 m طول دارند۔ که زاویه بین آن ها 104 درجه میباشد ۰ اگر ریسمانها در عین لیول (سطح) قایم گردیده باشند ، پیدا کنید که نقاط اتصال ریسمانها با کریت، از همدیگر چقدر دورتر واقع اند؟

۴۹ ــ دو عراده موتر در نقطهٔ تقاطع دو سرك مستقیم قرار داشته و از همان نقطه شروع به حرکت میکنند۰ یکی آن بالای یك سرك به فاصلهٔ 3.75 میل و موتر دومی بالای سرك دوم مستقیماً به فاصلهٔ 3.75 میل سفر کرده است ۰ هر دو موتر بعد از چند وقت ذریعه رادیو تماس میگرند ، که آنها به فاصلهٔ 4.50 میل از هم دیگر دور اند۰ زاویهٔ تقاطع هر دو سرك چند درجه خواهد بود ؟

۵۰ ــ در یك شکل ساختمانی (۳۷ ــ ۳) ، زاویه های نشانی شده را دریافت کنید ؟

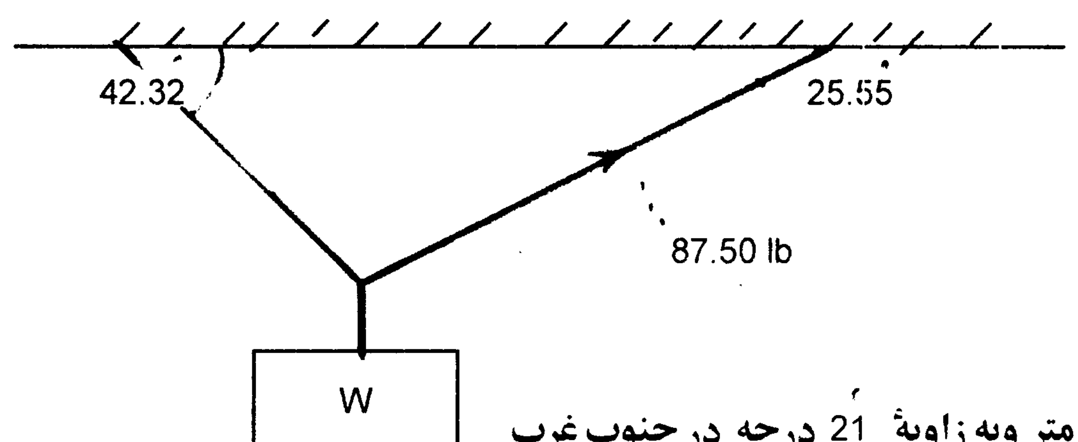


شکل (۳۷ ــ ۳)

۵۱ ــ یك شهر A به فاصلهٔ 290 میل و زاویهٔ 51 درجه طرف جنوب از شرق واقع است ۰ یك پیلوت طیاره بطرف شمال شهر A در پرواز میباشد وبه شهر B مخابره منماید که طیاره موشوف به خط 10.5 درجه بطرف جنوب از شرق شهر B در پرواز است ۰ شما دریافت کنید که طیاره از شهر B چقدر دورتر واقع است ؟

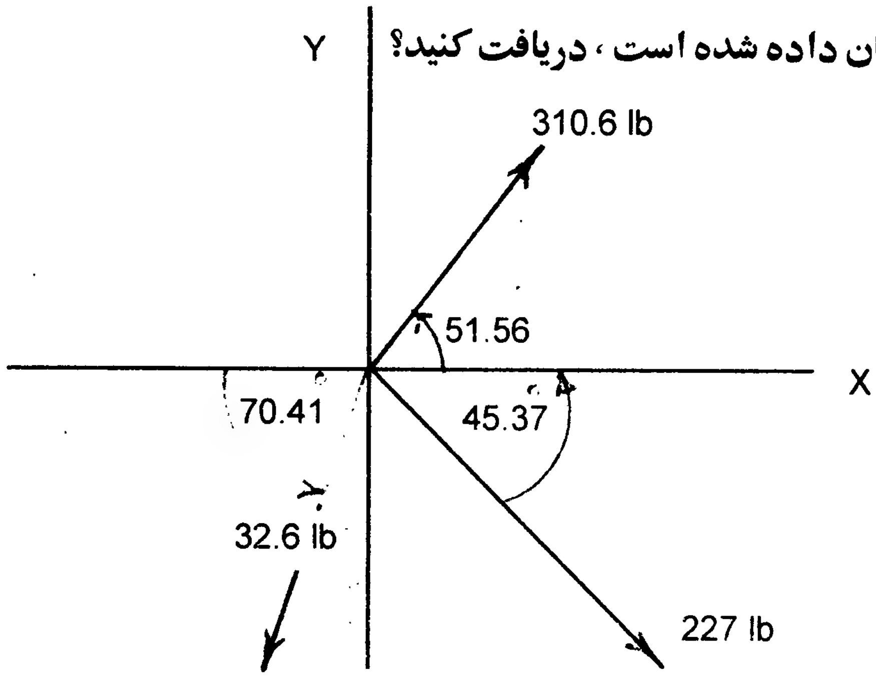
۵۲ ــ دو ضلع دندانهٔ اره با الترتیب 2.10 میلی میتر و 2.25 میلی میتر طول دارند۰ قاعده دندانه 2.25 میلی میتر است ۰ اضلاع دندانه به چند درجه زاویه با هم تقاطع میکنند ؟ (زاویهٔ نوك دندانه چند درجه است) ۰

۵۳ ــ وزنی را که توسط دو ریسمان طبق شکل (۳۸ ــ ۳) آویزان گردیده است در صورت دریافت نمأید که قوهٔ کشش در یکی ازریسمانها 87.50 lb شود ؟



۵۴ ــ شهر A به فاصلهٔ 650 کیلومتر وبه زاویهٔ 21 درجه در جنوب غرب شهر های جدید التعمیر موقعیت دارد ۰ سیگنل های رادیؤی نشان مید هد که یك کشتی به زاویهٔ 10.5 درجه در جنوب شرق شهرهای جدید التعمیر و به زاویهٔ 5.6 درجه در شمال شهر A موقعیت دارد ، معلوم کنید که کشتی موصوف از هر شهر چقدر دورتر است ؟

۵۵ــ محصلهٔ قوه های را که در شکل (۳۹ ـــ ۳) نشان داده شده است ، دریافت کنید؟

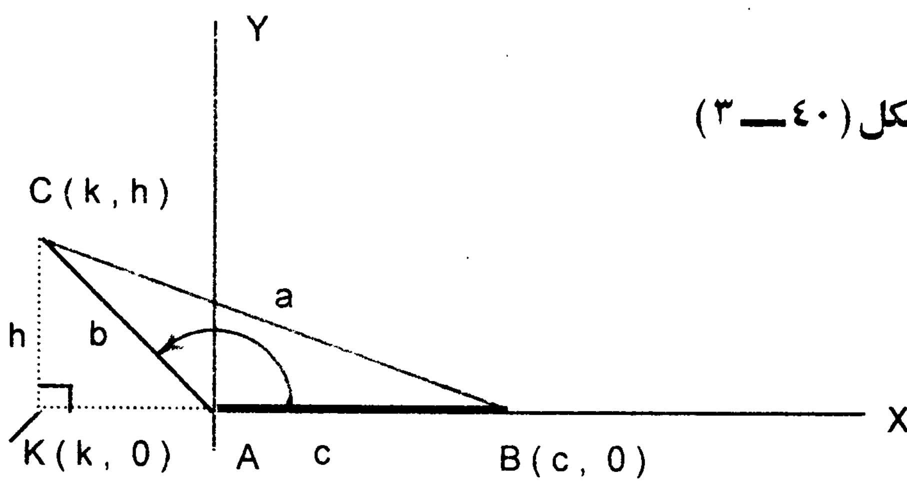


شکل (۳۹ ـــ ۳)

۵۶ ـــ یك طیاره جت در مسیر افقی با سرعت 1,200 فت فی ثانیه پرواز میکند ۰ یك میزایل از طیاره مذکور به مسیر افقی به زاویهٔ 30 درجه فیر میگردد ، و باسرعت 2,000 ft / sec طیاره را ترك میگوید ۰ سرعت میزایل را بعد از 10 ثانیه در صورت دریافت نمأید که مرکبهٔ عمودی آن از قرار (Vv = 32t) فت فی ثانیه داده شده باشد ؟

﴿ پیدا کردن مساحت مثلث از طریق قانون کوساین ﴾

با استفاده از قانون کوساین میتوانیم فورمول دریافت کردن مساحت مثلث را ثبوت نمأیم ۰ جهت ثبوت این موضوع بیائید یك مثلث ABC را طوری در کوردینیت قرار میدیهیم که زاویهٔ A آن در حالت ستندارد موقعیت بگیرد ، (۴۰ ـــ ۳) ۰



شکل (۴۰ ـــ ۳)

ثبوت : نخست ، از رأس C عمود h را رسم مینمأیم ۰ حال ، مطابق توابع مثلثاتی نوشته کرده میتوانیم ، $h = b \sin A$ و از طرف دیگر ، مساحت مثلث مساوی است به ، $A = 1/2\,(ch)$ بعداً قیمت h را در فورمول مساحت تعویض مینمأیم :

$$\text{Area (مساحت مثلث)} = 1/2\,(bc)(\sin A) \quad .... \quad (20 -- 3)$$

به همین منوال ، اگر ما با الترتیب دو زاویهٔ دیگر این مثلث را در حالت ستندارد قرار بدیهیم ، فورمولهای مشابه از قرار آن زاویه ها نیز ثبوت شده میتواند (مانند :

$A = 1/2\,(ac)(\sin B)$, $A = 1/2\,(ab)(\sin C)$

$A = 1/2\,(ac)(\sin B)$ مثلث

مساحت : عبارت است از ، نصف حاصل ضرب دو ضلع مثلث ضرب در sin زاویهٔ مابینی هر دو ضلع ۰

مثال : مساحت مثلث ABC را در صورت پیدا کنید که معلومات ذیل بدسترس باشد ،

$$a = 2.2\ cm\ ,\quad b = 1.3\ cm\ ,\quad C = 43^\circ\ 10'$$

حل : $A = 1/2\,(ab)\sin C\ ,\qquad A = \frac{1}{2}(2.2)(1.3)\sin 43^\circ\ 10' = (1.43)(0.6841) = 0.98\ cm^2$

﴿فورمول هیرون ، جهت پیدا کردن مساحت مثلث﴾

(Heron's Formula)

مساحت یك مثلث کیفی را میتوان از فورمول ذیل نیز پیدا کرد :

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\ ,\ ===>\ \text{که}\ s = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

ثبوت : با استفاده از فورمول : $A = 1/2\,(bc)\sin A$ --------------

دو طرف معادله (فورمول فوق) را مربع میسازیم :

$$A = \sqrt{\frac{1}{4}b^2c^2\sin^2 A} = \sqrt{\frac{1}{4}b^2c^2(1-\cos^2 A)}$$

با استفاده از قانون کوساین از قرار a :

$$A = \sqrt{\frac{1}{2}bc(1+\cos A)\ X\ \frac{1}{2}bc(1-\cos A)}\ ....(\text{الف})$$

$$\frac{1}{2}bc(1+\cos A) = \frac{1}{2}bc\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) = \frac{1}{2}bc\left(\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$$

$$= \frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{4}$$

$$= \frac{(b+c)^2-a^2}{4}$$

رابطهٔ فوق را میتوان نوشته کنیم :

$$\frac{1}{2}bc(1+\cos A) = \frac{[(b+c)+a]}{2}\ X\ \frac{[(b+c)-a]}{2}\ ......(1)$$

همچنان ، میتوان نوشته کنیم که :

$$\frac{1}{2}bc(1-\cos A) = \frac{a-b+c}{2}\ X\ \frac{a+b-c}{2}\ ....(2)$$

قیمت های رابطهٔ (1) و (2) را در رابطهٔ جذری فوق ، رابطهٔ (الف) وضع میکنیم :
که در نتیجه ، داریم :

$$A = \sqrt{\frac{b+c+a}{2}\ X\ \frac{b+c-a}{2}\ X\ \frac{a-b+c}{2}\ X\ \frac{a+b-c}{2}}$$

اگرما $s = 1/2(a+b+c)$ قرار بدیهیم ، و از قیمت s بالترتیب a ، b و c را تفریق کنیم چنین داریم :

$$s - a = \frac{b+c-a}{2} \quad , \quad s - b = \frac{a-b+c}{2} \quad , \quad s - c = \frac{a+b-c}{2}$$

لهذا فورمول هیرون جهت
دریافت کردن مساحت مثلث بدست می آید ·

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad ======> \quad s = \frac{(a+b+c)}{2}$$

مثال : یك دهقان ، یك قطعه زمین مثلث ـ شکل دارد، که اضلاع آن چنین اندازه گیری شده است :
مساحت این زمین را بواحد ایکر(acres)در صورت پیدا کنید که :
که (یك ا یکر مساوی میشود به 4,840 مربع یا ردز) ؟

a = 125 yards, b = 160 yards, c = 225 yards,

حل : نخست ، مساحت این زمین را با استفادهٔ فورمول " هیرون " دریافت میکنیم ·

$$s = \frac{1}{2}(125 + 160 + 225) = \frac{1}{2}(510) = 255, \quad s - a = 255 - 125 = 130 , \quad s - b = 255 - 160 = 95$$

$$s - c = 255 - 225 = 30 , \quad A = \sqrt{(255)(130)(95)(30)} = 9{,}720 \text{ sq. yards}$$

چون یك ایکر مساحت مساوی است به 4, 840 مربع یارد ، لهذا : زمین به واحد ایکر مساوی میشود
به 4,840÷9,720 = ۲ ایکر

« قانون تنجنت »

(The law of Tangents)

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan 1/2(A-B)}{\tan 1/2(A+B)}$$ .... قانون تنجنت

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$ قانون ساین $$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B} \quad (i)$$

ثبوت :

جهت حل مثلث کیفی ، یك فورمول دیگر نیز بکار برده میشود · درینجا ، میخوا هیم آنرا به ثبوت (مرحلهٔ نهای) برسانیم ·

بیا ئید ، از قانون ساین شروع کنیم · $$\frac{a}{b} + 1 = \frac{\sin A}{\sin B} + 1 \quad , \quad \frac{a}{b} - 1 = \frac{\sin A}{\sin B} - 1$$

در معادلهٔ (i) ، به هر دو طرف معادله با الترتیب : عدد 1 وعدد (1 -) را جمع میکنیم ، که در نتیجه داریم :

$$\frac{a+b}{b} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin B} \quad ...(i) \qquad \frac{a-b}{b} = \frac{\sin A - \sin B}{\sin B} \quad ...(ii)$$

حا ل ، اگر ما معادلۀ (ii) را به معادلۀ (i) تقسیم نمایم چنین داریم :

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B}$$

اگر از موضوع فیکتورینگ استفاده کنیم ، چنین نوشته کرده میتوانیم :

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{2\cos 1/2(A+B)\sin 1/2(A-B)}{2\sin 1/2(A+B)\cos 1/2(A-B)} \quad \ldots\ldots (iii)$$

و یا ـــــ

$$\frac{a-b}{a+b} = \cot 1/2(A+B)\tan 1/2(A-B)$$

از طرف دیگر ، $\cot\theta = 1/\tan\theta$

لهذا : ------------------

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan 1/2(A-B)}{\tan 1/2(A+B)}$$ ـــــ قانون تنجنت

با در نظر داشت دو زاویۀ دیگر مثلث ، ما میتوانیم که عین رابطه را برای اضلاع دیگر مثلث نیز بدست بیاوریم ٠
پس میتوانیم ، قانون تنجنت را به جملات ذیل خلا صه نمود ٠

نسبت فرق هر دو ضلع بر مجموع همان دو ضلع مساوی میشود به نسبت تنجنت نصف فر ق زاویای مقابل اضلاع مطلوب بر نصف تنجنت مجموع زاویای که در مقابل اضلاع مطلوب قرار دارند ٠

مثا ل : در صورتیکه دو ضلع و یك زاویۀ یك مثلث داده شده باشند ، اجزأ دیگر این مثلث را دریافت کنید ؟

$A = 70^\circ 20'$, $b = 58.3$, $c = 21.6$ ...... دیگر اجزأ مثلث را دریافت کنید ؟

حل : مطابق قانون تنجنت داریم :

$$\frac{b-c}{b+c} = \frac{\tan 1/2(B-C)}{\tan 1/2(B+C)}$$ قانون تنجنت

از طرف دیگر ،مجموع زاویای داخلی یك مثلث مساوی 180 درجه است ٠

$$A+B+C = 180^\circ \;,\; B+C = 180^\circ - A = 180 - 72^\circ 20' = 107^\circ 40'$$

$$1/2(B+C) = 53^\circ 50' ,\quad b+c = 79.9 ,\quad b-c = 36.7 ,\quad \frac{36.7}{79.9} = \frac{\tan 1/2(B-C)}{\tan 53^\circ 50'}$$

$$\tan 1/2(B-C) = \frac{(36.7)\tan 53^\circ 50'}{79.9} = \frac{(36.7)(1.3680)}{79.9} = 0.6284$$

$1/2(B-C) = 32^\circ 10'$, $1/2(B+C) = 53^\circ 50'$

لهذا : از جمع و تفریق دو رابطهٔ فوق ،
قیمت زاویای مطلوب را پیدا کرده | جوابات ---- $C = 21^\circ 40'$. $B = 86^\circ$ | میتوانیم :

در نتیجه ، با استفادهٔ قانون ساین:
میتوانیم طول ضلع a را نیز پیدا کنیم :

$$a = \frac{b \sin A}{\sin B} = \frac{(58.3)\sin 72^\circ 20'}{\sin 86^\circ} = \frac{(58.3)(0.9528)}{0.9976} = 55.7$$

﴿ تمرین ﴾

۱ ـــ با استفادهٔ قانون تنجنت ، اجزأی متباقی مثلث های ذیل را دریافت نمأید ؟

1. $A = 60^\circ$, $b = 20$, $c = 30$,
2. $B = 150^\circ$, $a = 150$, $c = 30$
3. $C = 115^\circ 10'$, $a = 1.10$, $b = 2.10$
4. $A = 48.3^\circ$, $b = 24.7$, $c = 52.8$

وسیمبول ها را میباید بصورت درست تحریر کرد . مثلاً : ($\sin\theta = 0.525$) دارای مفهوم مثلثاتی است ـ اما در عوض ، اگر نوشته شود که :

($\sin = 0.525$) این افاده هیچ مفهوم مثلثاتی ندارد ، (زیرا واضح نیست (?---- sin) کدام زاویه ؟) . بسیار ضروری حتی لازیمی است که ما آن زاویهٔ مطلوب که پیدا کردن توابع آن از جدول ، کلکولیتر و یا کمپیوتر توقع است نزد خود مشخص نمائیم .

مثال : توابع مثلثاتی آن زاویه را دریافت کنید که ضلع نهایی (Terminal side) یا به عبارهٔ دیگر ، ضلع (r) آن از نقاط : (P (3 , 4) عبور کند . در شکل (۱۰ ـــ ۱) این زاویه به حالت ستندرد قرار دارد . حال از طریق قضیهٔ (فیثاگورین) چنین نوشته کرده میتوانیم : ($a^2 + b^2 = c^2$) .... (قضیهٔ فیثاگورین)

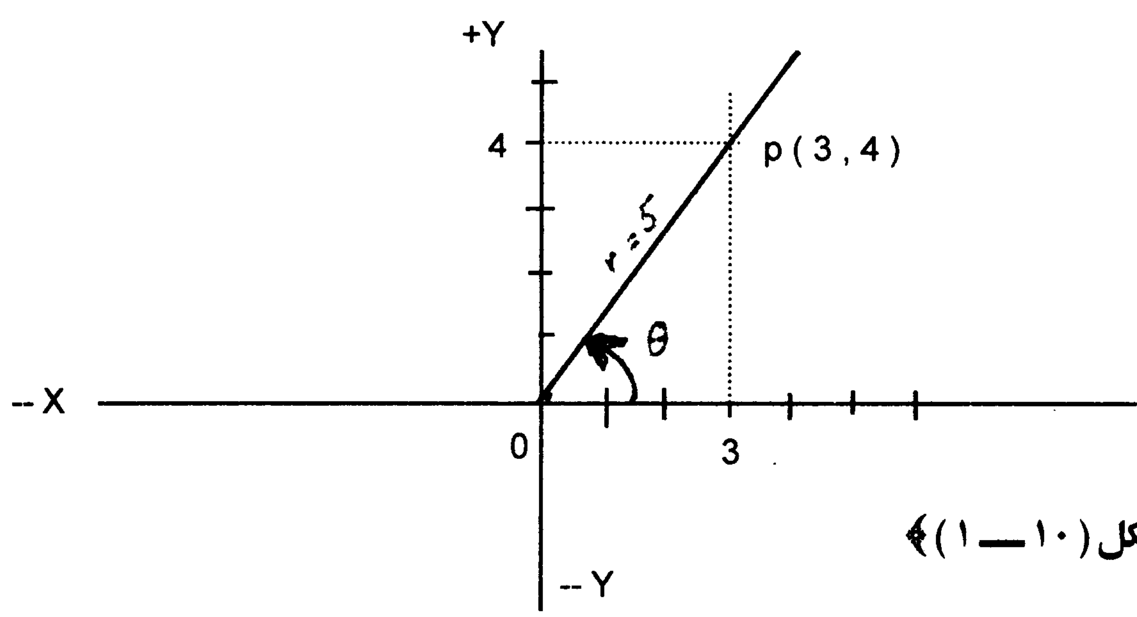
قیمت وتر (r) از نقطهٔ [P (3 , 4)] میگذرد . $r = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$. لهذا با داشتن تمام قیمت های: ($X = 3$, $Y = 4$, $r = 5$) ، توابع مثلثاتی ذیل را نوشته کرده میتوانیم :

$\sin\theta = 4/5$, $\cos\theta = 3/5$, $\tan\theta = 4/3$

$\csc\theta = 5/4$, $\sec\theta = 5/3$, $\cot\theta = 3/4$

اگر ما توابع مثلثاتی فوق الذکر را به دقت مطالعه نمأیم نتجهٔ آتی بدست می آید :

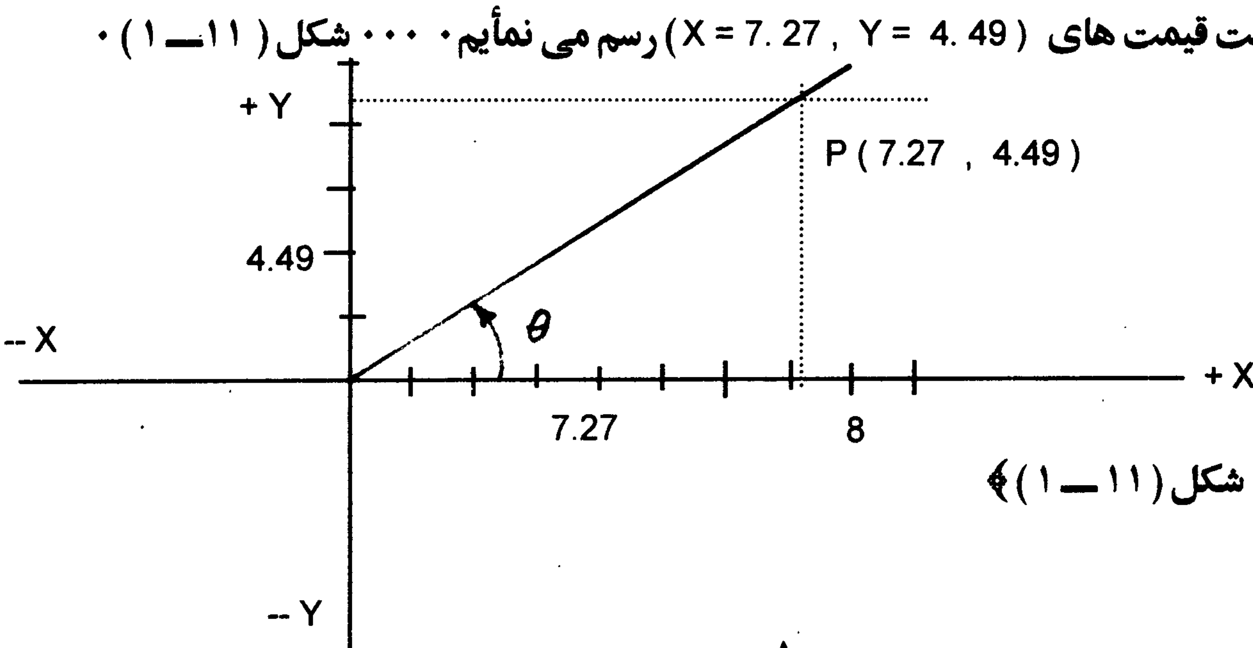
$\csc\theta = 1/\sin\theta$, $\sec\theta = 1/\cos\theta$, $\cot\theta = 1/\tan\theta$



﴿ شکل (۱۰ ـــ ۱) ﴾

مثال دوم : توابع مثلثاتی یک زاویهٔ که ضلع دوم آن (r) از نقطهٔ (7.27 , 4.49) عبور کند دریافت کنید ؟

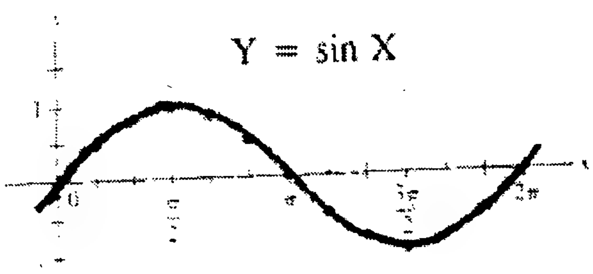
حل : مثلث را با در نظر داشت قیمت های ($X = 7.27$, $Y = 4.49$) رسم می نمأیم . ... شکل (۱۱ ـــ ۱) .

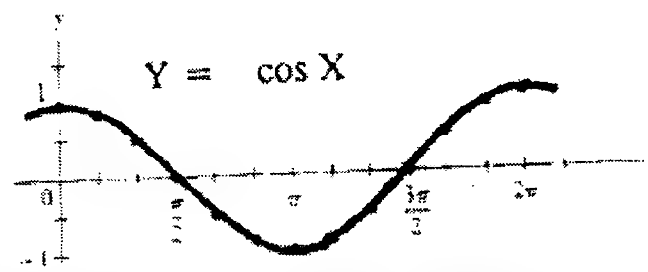


﴿ شکل (۱۱ ـــ ۱) ﴾

فصل چهارم

گراف های توابع مثلثاتی :





$y = a\sin x$, $y = a\cos x$

$y = a\sin bx$, $y = a\cos bx$

$y = a\sin(bx + c)$, $y = a\cos(bx + c)$

$y = \tan x$, $y = \cot x$, $y = \sec x$, $y = \csc x$

1. the amplitude (equal to $|a|$).
2. the period $\left(\text{equal to } \frac{2\pi}{b}\right)$.
3. the displacement $\left(\text{equal to } -\frac{c}{b}\right)$.

﴿ فصل چهارم ﴾

گراف های توابع مثلثاتی

یکی از طریقه های روشن و واضح که بتوانیم تغیرات و تحولات را در توابع مثلثاتی مطالعه و تحقیق نمأ یم ، تشریح زریعهٔ رسم کردن گراف یك تابع میباشد ۰ گرافهای توابع مثلثاتی در تحلیل امواج برقی و امواج صوتی رول بس عمده دارند ۰ بطور مثال : اگر متوجه شویم ، موج برق منناوب که ما از آن در خانه های خویش استفاده مینمائیم ، در حقیقت گراف Y = sin X است ۰ گراف های توابع مثلثاتی بمنظور تحلیل کمیت هایکه تابع یکدیگر باشند ، اهمیت زیاد دارند ۰ درین فصل ما ، گرافهای توابع مثلثاتی را مورد بحث قرار میدیهیم که بخش زیادتر آنرا گرافهای Y = A sin X و Y = A cos X تشکیل میدهند ۰ تطبیق عملی گراف های توابع مثلثاتی در اخیر این فصل ، در تمرینها مفصلاً تشریح میگردند ۰

رسم کردن گراف های Y = A sin X و Y = A cos X :

گراف های توابع مثلثاتی با لای سیستم (کواردنت مستطیل) رسم میشوند ۰ در ترسیم گرافهای توابع مثلثاتی ، این طرز العمل عادی است که زاویه (متحول X) به واحد ریدین (radians) نشان داده شوند ۰ تقسیمات محور های X و Y عموماً به اعداد حقیقی نشان داده میشود ـ حتی میتوانیم تقسیمات محورها به هر سکل اعیار گردند ۰ اما ، بطور عموم زاویه ها بواحد ریدین ارأیه میشوند ۰ دراین بحث ، برای آنکه گراف های مذکور را تشریح کرده بتوانیم ، ابتدأ می پردازیم به ترتیب دادن جدول قیمت های برای معادلهٔ Y = A sin X ، و Y = A cos A جداول ذیل را مشاهده نمأید :

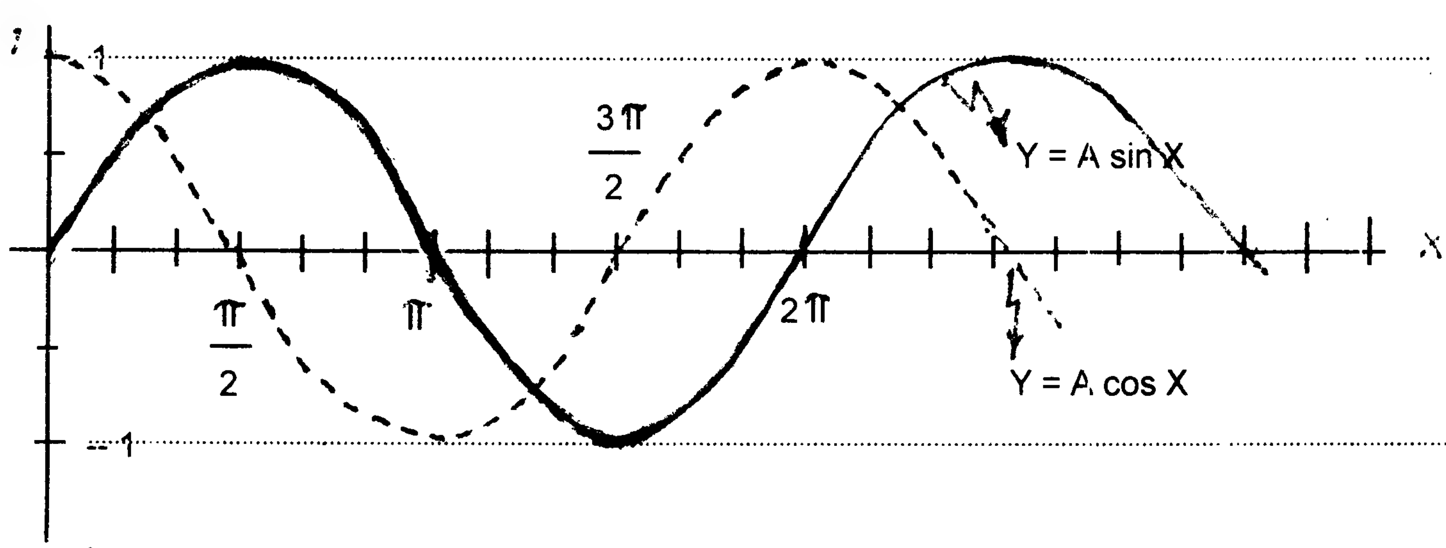
نوت : در معا دلات ، Y = A sin X و Y = A cos X ـ حرف A بنام دامنهٔ اعظمی گراف یا Amplitude یاد میگردد که در این مورد خاص قیمت آنرا ما فعلاً ـ 1 ـ واحد قرار میدیهیم :

جدول تابع : Y = A sin X ، که قیمت A یك واحد است ۰

X	0	π / 6	π / 3	π / 2	2π / 3	5π / 6	π	7π / 6	4π / 3	3 π / 2	5π / 3	11 π / 6	2π
Y	0	0.5	0.87	1	0.87	0.5	0	--0.5	--0.87	-- 1	--0.87	--0.5	0

جدول تابع : Y = A cos X که قیمت A یك واحد است ۰

X	0	π / 6	π / 3	π / 2	2π / 3	5π / 6	π	7π / 6	4π / 3	3π /2	5π / 3	11π / 6	2 π
Y	1	0.87	0.5	0	-- 0.5	-- 0.87	-- 1	-- 0.87	-- 0.5	0	0.5	0.87	1



هر دو گراف های Y = A sin X و Y = A cos X با لای یك (کواردینیت ـ سیستم) رسم گردیده است ۰ تا با هم دیگراز نقطهٔ نظر جلو بودن یکی از دیگر (lead) ویا عقب ماندن یکی از دیگر ، یعنی (lag) خوبتر تشخیص و مقایسه شده بتوانند ۰

گراف های فوق الذکر برای زاویهٔ 2 ΙΤ rad. ترسیم گردیده است ، درحالیکه ما میتوانیم آنرا بیشتر ادامه بدیهیم ۰ اگر تحول زاویه در یك گراف مطلوب از صفر درجه تا به 2 Πad. یعنی زاویهٔ 360 باشد ، درینصورت احتزاز گراف یك سایکل یا one cycle میباشد۰ که گراف های فوق الذکر ، موج یك سایکل را نشان میدیهند ۰گرچه قیمت های توابع در جداول هذأ زیادتر از یك سایکل ادامه پیدا کرده است ۰ ادامهٔ ترسیم گراف ها بطرف منفی و مثبت تا نهای نیز امکان پذیر است ۰

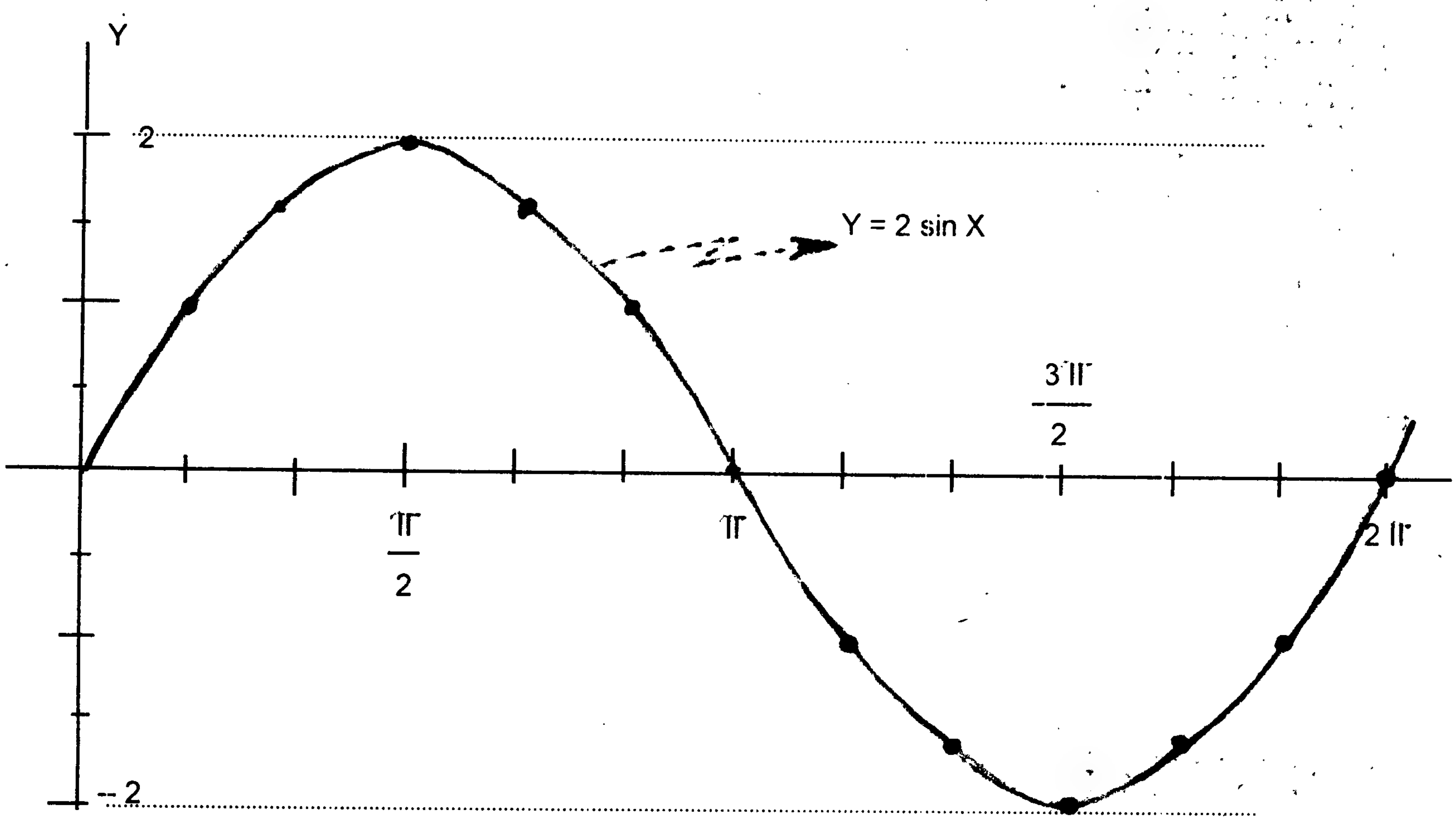
از مطالعهٔ گراف های فوق نتیجه میگیریم که هر دو گراف به عین شکل بوده ، منتها اینکه : گراف تابع Y = A cos X به اندازه (Π/2) rad یا 90 درجه بطرف چپ جلو تر افتاده است ۰ یا میگوییم گراف دوم lead میکند گراف اول را با زاویهٔ 90 درجه ۰ و یا میگوییم که گراف اول lag میکند گراف دومی را با زاویهٔ 90 درجه ۰ شکل های هر دو گراف باید ، دقیقاً تحلیل و مطالعه شوند ، با توجه انکه گراف های مذکور محور X را در کدام نقاط قطع مینمایند۰ زیرا این معلومات در ترسیم همچو گراف ها بسیار ضروری میباشد و همچنان در ترسیم گراف ها خوبتر رهنمأی کرده میتواند ۰
برای انکه ،قیمت Y را بدست بیاوریم لازم است تا برای زاویهٔ X یك قیمت تعین نمأیم ۰ در اینجاه ملاحظه میشود که قیمت Y تابع X است ۰ در گرافها نیز ملاحظه میشود که بلندی اعظمی گراف ها مربوط اند به قیمت A ، بلکه نه مقدار زاویهٔ تعین شده ۰ همین قیمت|A|را در تابع مثلثاتی بنام صعود اعظمی (Amplitude) گراف یاد میکند ، که قیمت اعظمی Y را نشان میدهد ۰ و یا بعبارهٔ دیگر ، قیمت مطلقهٔ |A| صعود و نزول اعظمی گراف ها را تعین میکند ۰مثلاً در گراف های قبلی برای A یك واحد تعین گردید است ۰ لهذا گراف ها اعظمی تا یك واحد صعودی نوسان میکند ۰ اگر ما قیمت A را عدد 2 واحد تعین کنیم ، در آنصورت معادله شکل ذیل را بخود میگیرد و گراف به اندازهٔ 2 واحد صعودی نوسان خواهد کرد ۰

مثا ل دوم : گراف تابع Y = 2 sin X را رسم نمأید ؟

حل : نخست ، جدول قیمت ها را ترتیب میدیهیم ۰

جدول تابع مثلثاتی : Y = 2 sin X که قیمت اعظمی A ، (Amplitude) 2 است ۰

X	0	Π/6	Π/3	Π/2	2Π/3	5Π/6	Π	7Π/6	4Π/3	3Π/2	5Π/3	11Π/6	2Π
Y	0	1	1.73	2	1.73	1	0	-- 1	-- 1.73	-- 2	-- 1.73	-- 1	0

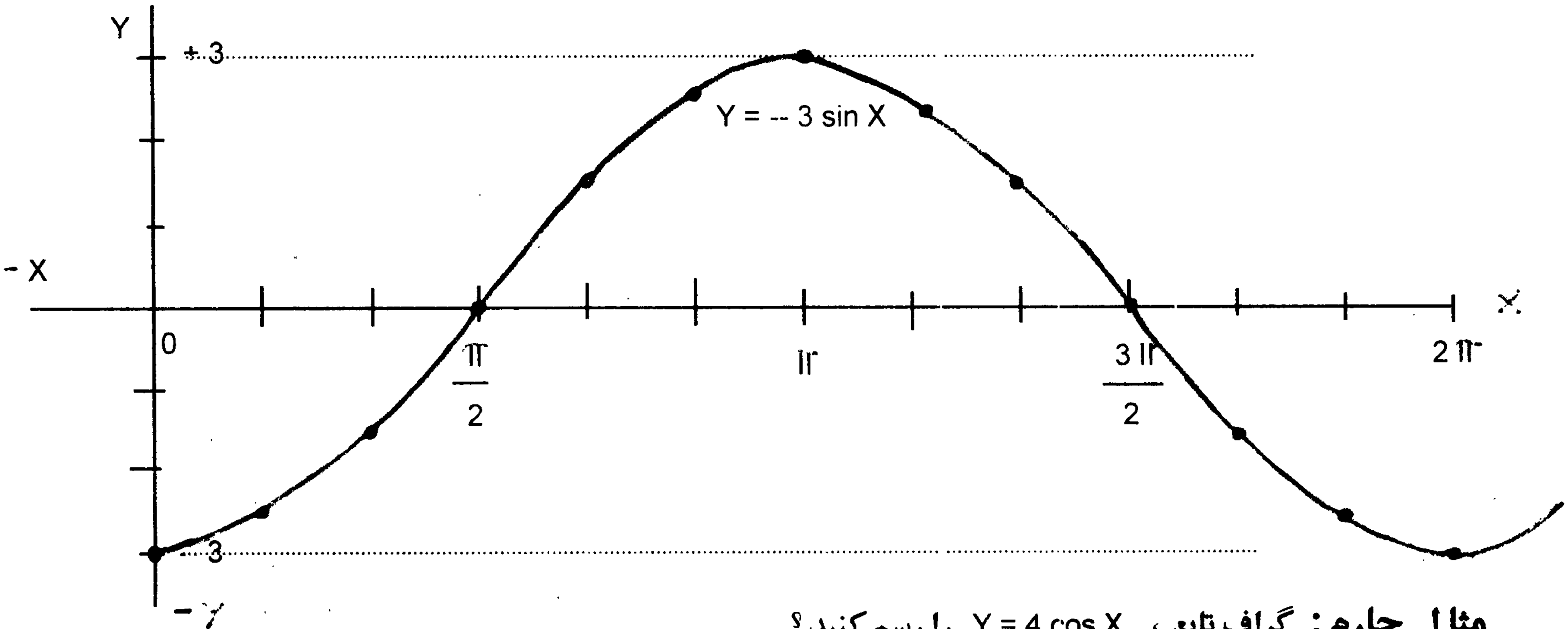


مثال سوم : گراف تابع ، $Y = -- 3 \cos X$ را رسم کنید ؟

حل : نخست ، جدول مربوط آنرا ترتیب میدیهیم ٠ دراین مثال ملاحظه میشود که قیمت A یعنی Amplitude منفی 3 است یعنی ، نوسان اعظمی گراف تا به مثبت 3 و منفی 3 تعین میگردد٠ که همین علامه A ، کمیت گراف را از سمت مثبت به منفی تغیر میدیهد ٠ اگر به این موضوع بیشتر دقیق شویم ، بخوبی ملاحظه خواهد شدکه : شکل گراف (نوسان اعظمی صعودی و نزولی گراف) با کمیت A و علامهٔ A تغیر میخورد

Y = -- 3 sin X

X	0	π / 6	π / 3	π / 2	2 π / 3	5 π / 6	π	7 π / 6	4 π /3	3 π /2	5 π / 3	11 π / 6	2 π
Y	-- 3	--2.6	--1.5	0	1.5	2.6	3	2.6	1.5	0	-- 1.5	-- 2.6	-- 3

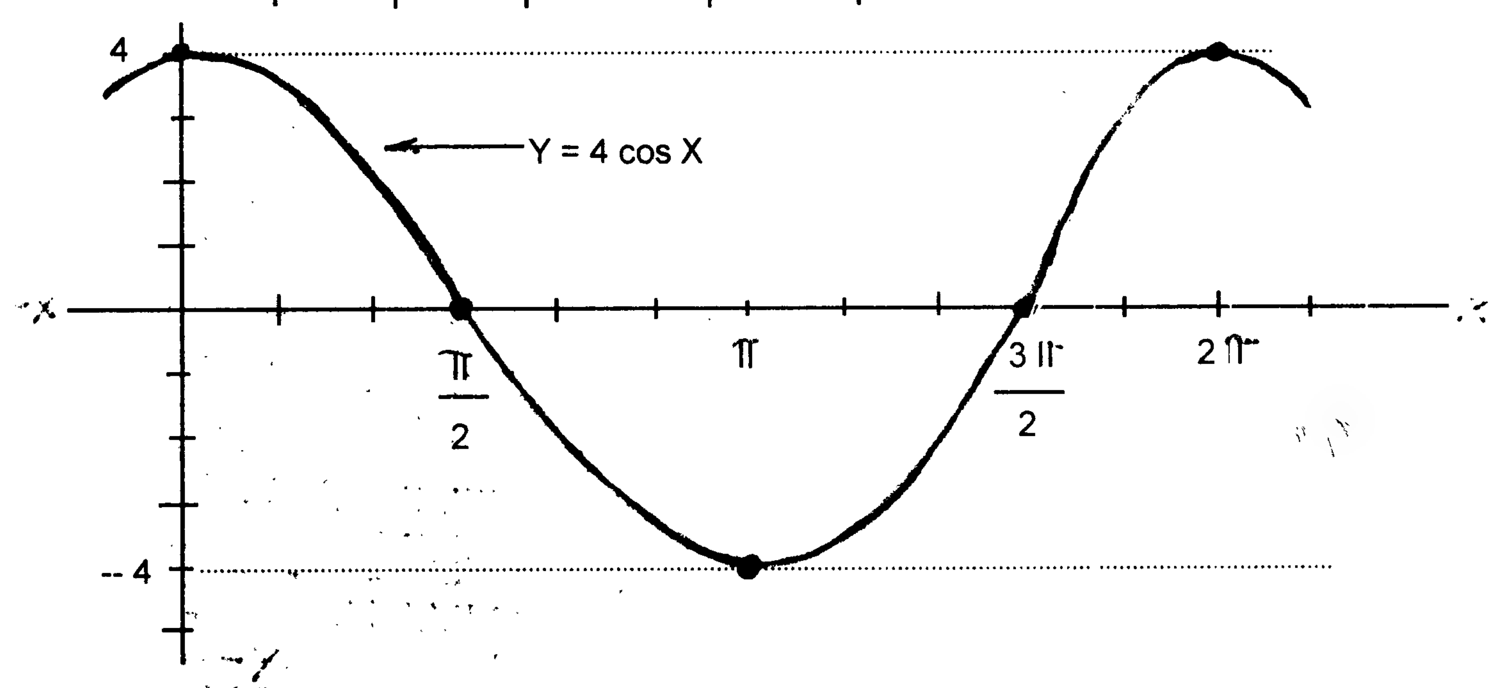


مثال چارم : گراف تابع ، $Y = 4 \cos X$ را رسم کنید ؟

حل : نخست ، ما برای قیمت های اعظمی و اصغری Y که عدد (4) است جدول ذیل را ترتیب میدیهیم ٠ بعداً چون با گراف cos X آشنا میباشیم ، رسم کردن گراف حال آسانتر است زیرا میدانیم که به چه شکل میباشد ٠

Y = 4 cos X

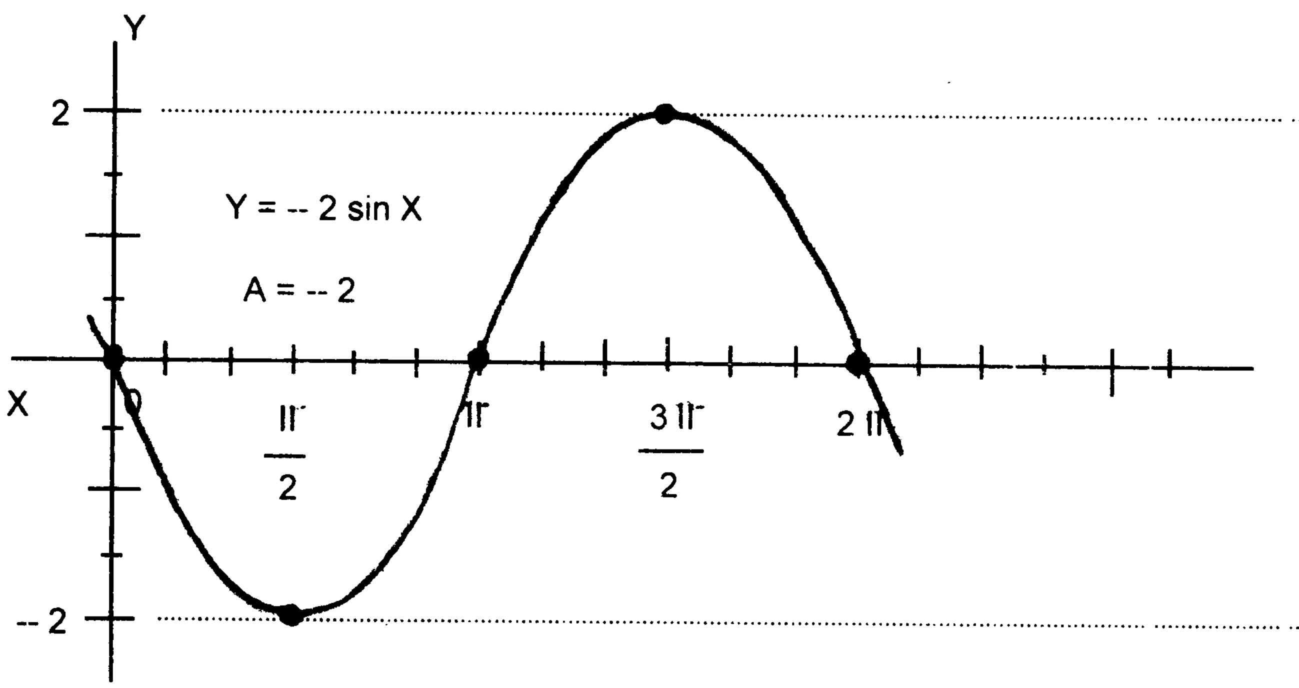
X	0	π / 2	π	3 π / 2	2 π
Y	4	0	-- 4	0	4



مثال پنجم : گراف تابع ، Y = -- 2 sin X را رسم کنید ؟

حل :   نخست جدول تابع را ترتیب نموده ، بعداً گراف را رسم مینمأیم ·   جدول تابع Y = -- 2 sin X
که قیمت A = -- 2 میباشد ·

X	0	π / 2	π	3π/2	2π
Y	0	-- 2	0	2	0



گراف های Y = A sin BX و Y = A cos BX :

در دروس گذشته مطالعه کردیم ، که در ترسیم گراف Y = sin X ، قیمت های Y بعد از هر زاوئیه .rad (2π) دوباره تکرار میشود ·

زیرا ما نوشته کرده میتوانیم که : .... = sin (X + 4π) = sin (X+2π) = Sin x ... دوام میکند ·

بخاطر داشته باشید که هر تابع F یك پیریود (Period) که با حرف P نشانی میشود دارا بوده که در ترسیم گراف بسیار کمك میکند ·   F (x) = F (x + P)

برای توابع که گراف آن نوبتی تکراری بوده باشد ، مثلاً : در گرافهای ساین و کوساین پیریود باید تعریف شود ·

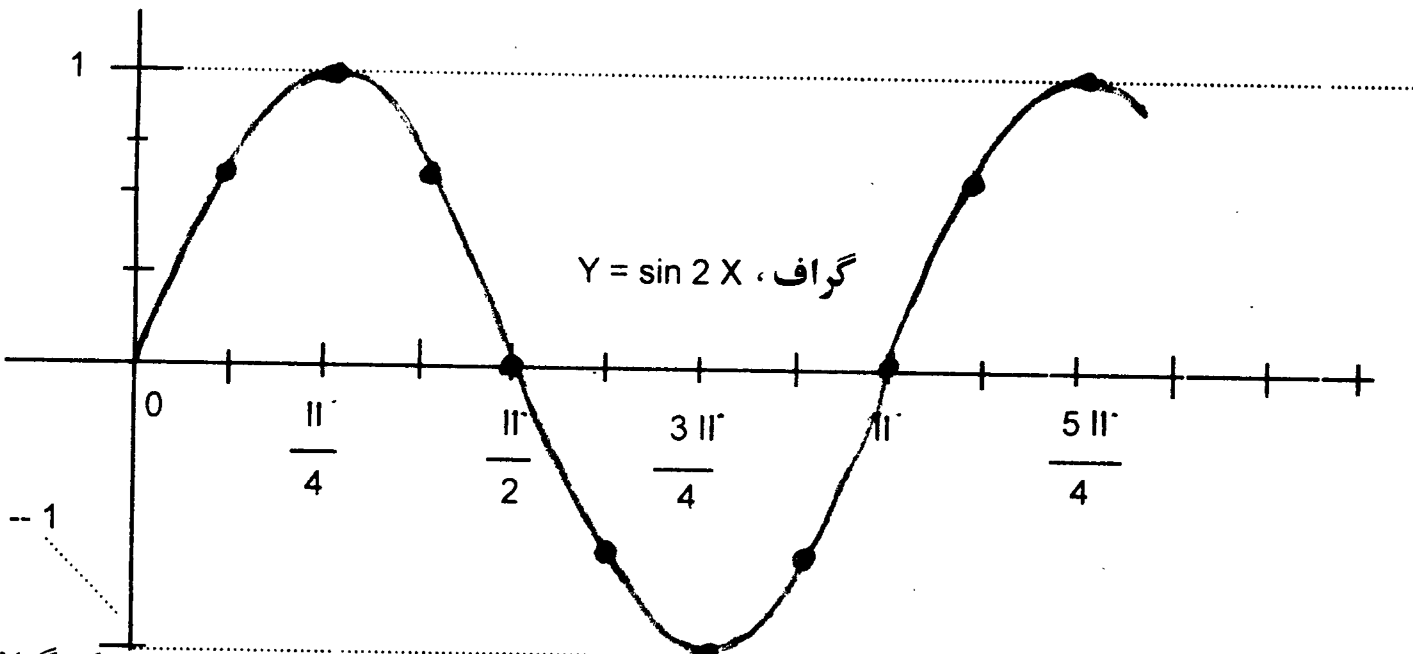
پیریود (Period) : عبارت از فاصلهٔ X است بالای محور X بین یك نقطهٔ شروع گراف بالای محور X و نقطهٔ دیگری بالای محور X که گراف دوباره از آن تکرار میشود که درین حالات ، عموماً قیمت های Y با هم مساوی میباشند ·

بیأید ، حال گراف تابع Y = sin 2 X را رسم نمأیم :

معادلهٔ فوق به این مفهوم است که : هر قیمت انتخابی X را باید نخست ضرب 2 نموده ، بعداً قیمت ساین آنرا از جدول دریافت نمأیم · برای تابع فوق جدول ذیل را ایجاد کرده میتوانیم :

جدول تابع Y = sin 2X که قیمت A = 1 میشود·

X	0	π / 8	π / 4	3π / 8	π / 2	5 π / 8	3 π / 4	7 π / 8	π	9 π / 8	5 π / 4
2 X	0	π / 4	π / 2	3 π / 4	π	5 π / 4	3 π / 2	7 π /4	2 π	9 π / 4	5 π / 2
Y	0	0.7	1	0.7	0	-- 0.7	-- 1	-- 0.7	0	0.7	1



وقتیکه با در نظر داشت دانستن پیریود، جدول تهیه شد، گراف تابع Y = sin 2 X را رسم کردیم، و بملاحظه رسید که گراف موصوف بعد از فاصلهٔ زاویهٔ π rad. بالای محور X دوباره تکرار میشود. موجودیت عدد 2 قبل از قیمت X باعث گردید که پیریود period این تابع به مقایسه پیریود تابع sin X نصف شود. تشریحات فوق را چنین خلاصه کرده میتوانیم: اگر پیریود یك تابع مثلثاتی F (x) را مساوی به P نشان بدهیم در آنصورت پیریود تابع F (bx) مساوی میشود به $\frac{\text{period}}{|b|}$

چون هر تابع از توابع sin X و cos X دارای پیریود 2π rad. میباشد، لهذا هر تابع از توابع sin BX و cos BX دارای پیریود 2π/|b| میشود. بطور مثال: پیریود تابع sin 3X مساوی میشود به 2π/3. به این معنی که گراف تابع Y = sin 3X بعد از 2π/3 واحد بالای محور X دوباره تکرار میشود. به همین منوال، پیریود تابع cos 4X مساوی است به 2π/4 = π/2 و همچنان پیریود تابع sin 1/2 (x) مساوی میشود به 4π یعنی پیریود این تابع طویلتر است. بخاطر داشته باشید که پیریود تابع sin π X مساوی است به 2 = 2π/π. باید بخاطر داشته باشید که گراف تابع sin 3X بعد از هر دو واحد بار دیگر تکرار میشود. این هم قابل یاد آوری است که پیریود های sin 3X و sin π X تقریباً، باهم مساوی اند. که توقع نیز همین است، زیرا قیمت π از عدد 3 اندك بزرگتر است.

پیریود cos 3 π X مساوی است به: .... $\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{3\pi} = \frac{2}{3}$

در حالیکه پیریود (X) (π/4) sin مساوی است به: 8 = (π/4) / 2π = 2π / b

اگر ما تشریحات فوق را در نظر داشته، موضوع پیریود از گراف اول (Y = A sin X , Y = A cos X) ملاحظه نمأیم چنین نتیجه میگیریم:

هر یکی از توابع (Y = A sin BX) و (Y = A cos BX) دارای دامنهٔ اعظمی (Amplitude) |A| و پیریود 2π/|b| میباشد. دانستن این مشخصات جهت ترسیم توابع مثلثاتی خیلی با ارزش بوده که در مثالهای ذیل توضیح میشود:

مثال ششم: گراف تابع Y = 3 sin 4X را در صورت سکیچ کنید که $0 \le X \le \pi$ باشد.

حل: با توجه به نخستین ملاحظه، ما در مییابیم که دامنهٔ اعظمی (Amplitude) این تابع عدد 3 بوده و پیریود تابع مساوی میشود به: Period = 2π / b = 2π / 4 = π/2 = 90°

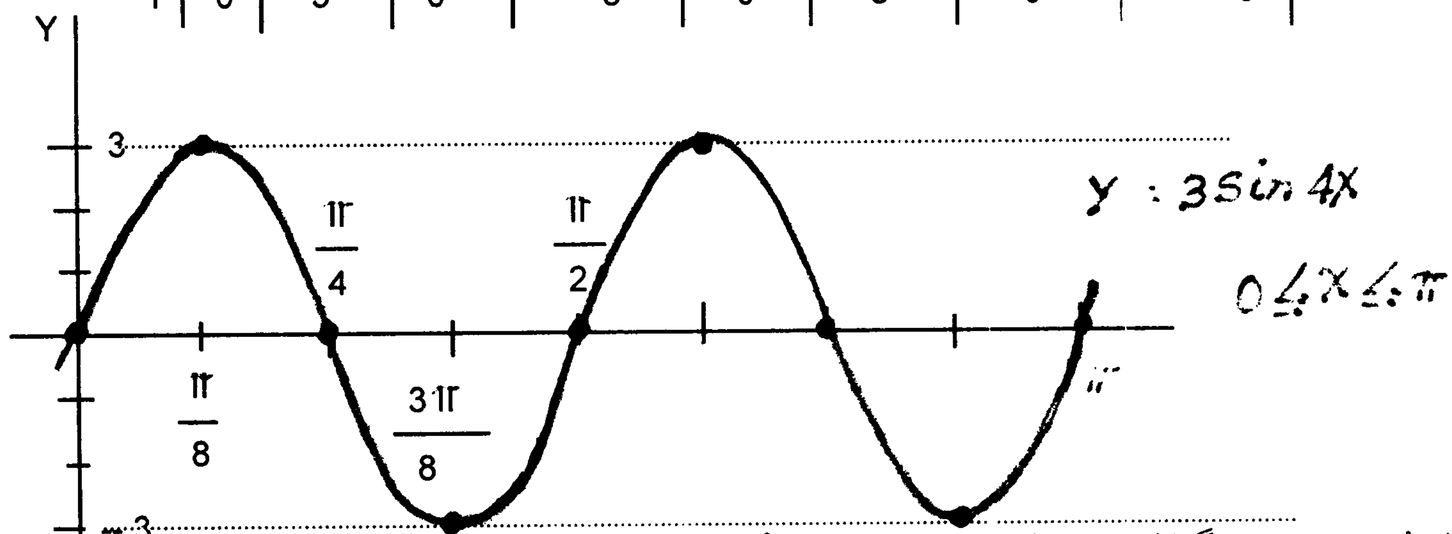
لهذا: ما میدانیم که قیمت Y مساوی صفر است، اگر قیمت X مساوی π/2 باشد. همچنان واضح میشود که تابع ساین صفر است در صورتکه:

اگر، X = π / 4 شود، Y = 0 است. و همچنان: اگر، X = π / 8 شود Y = 3 است.

اگر، X = 3π / 8 شود، Y = -- 3 است.

حال ، ما میتوانیم با داشتن معلومات فوق ، گراف را به سهولت ترسیم نمأیم ٠

X	0	π / 8	π / 4	3π / 8	π /2	5 π / 8	3 π/4	7 π / 8
Y	0	3	0	-- 3	0	3	0	-- 3



اکنون جدول فوق مربوط به گراف شکل فوق را تحت مطالعهٔ دقیق قرار میدیهیم ٠
در مثال فوق ، مشاهده میشود که در سکیچ کردن گراف های ساین و کوساین فاصلهٔ (1 / 4) حصهٔ پیریود حأیز اهمیت است ٠ از گراف تابع $Y = A \sin BX$ معلوم میشود که قیمت Y در 1 / 4 حصهٔ پیریود از صفر (مبدأ) به اعظمی صعود میکند ٠ و همچنان ، بعد از 4 / 1 حصهٔ دوم پیریود ، قیمت تابع Y دوباره صفر میگردد ٠ بهمین ترتیب ، در 4/ 1 حصهٔ سوم پیریود ، قیمت Y در سمت منفی باز اعظمی میشود ٠ و در 4 / 1 حصهٔ چارم پیریود ، قیمت Y با لا خره باز هم صفر میشود ، که این نقطه عبارت از آن نقطه بوده که پیریود تکمیل شده ، گراف دوباره تکرار میشود ٠ هکذأ ، اهتزاز یك سایکل تکمیل شده- پیریود های دیگر تکرار میشوند ٠

<u>**بخاطر داشته باشید که با دریافت 4 / 1 حصهٔ پیریود ، نقاط اساسی (نقاط اعظمی و اصغری) گراف مطلوب معلوم میشوند ٠**</u> قبل از ترسیم گرافهای $Y = A \sin BX$ و $Y = A \cos BX$ ، بسیار مهم است که نکات ذیل را در نظر داشته باشیم :

۱ــ تعین ویا شناخت قیمت اعظمی دامنهٔ گراف ــــ یا : A یعنی Amplitude گراف مطلوب ٠
۲ــ دریافت کردن پیریود (Period) ، ـــــــ $\|B\| / 2\pi$ ٠
۳ــ دریافت کردن قیمت تابع برای هر چارم حصه (4 / 1 حصهٔ پیریود- Period گراف) ٠

مثال هفتم : گراف تابع $Y = -- 2 \cos 3X$ را در صورت رسم کنید که : $0 \leq X \leq 2\pi$ باشد ٠

حل : از معادلهٔ تابع هذأ فهمیده میشود که دامنه اعظمی گراف یعنی A گراف مساوی به 2 -- بوده ، پیریود (T) گراف عبارت از $2\pi / 3 = 2\pi / B$ میشود ٠ این به آن مفهوم است که چارم حصهٔ پیریود عبارت است از :

۱ــ دامنهٔ اعظمی : $A = -- 2$ ٠

۲ــ پیریود : $T = 2\pi / B = 2\pi / 3$ ٠

۳ــــ چارم حصهٔ پیریود : $\pi / 6 = (1 / 4)(2\pi / 3)$ ٠

$$\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$$

همچنان ، ما میدانیم که درگراف کوساین با تعین کردن قیمت $X = 0$ قیمت یا تابع Y اعظمی میشود٠
ازطرف دیگر ملاحظه شده میتواند که قیمت Y مساوی است به 2-- درصورتیکه قیمت X صفر گردد ٠
قیمت اعظمی منفی 2 در گراف هذین تابع متوقع است ، زیرا که قبل از حد متحول علامهٔ منفی موجود میباشد ٠

تحلیل ذیل را بدقت تام مطالعه نمأید :

۱ــ گراف صفر میگردد در صورتیکه برای X قیمت $\pi/6$ تعین شود ·

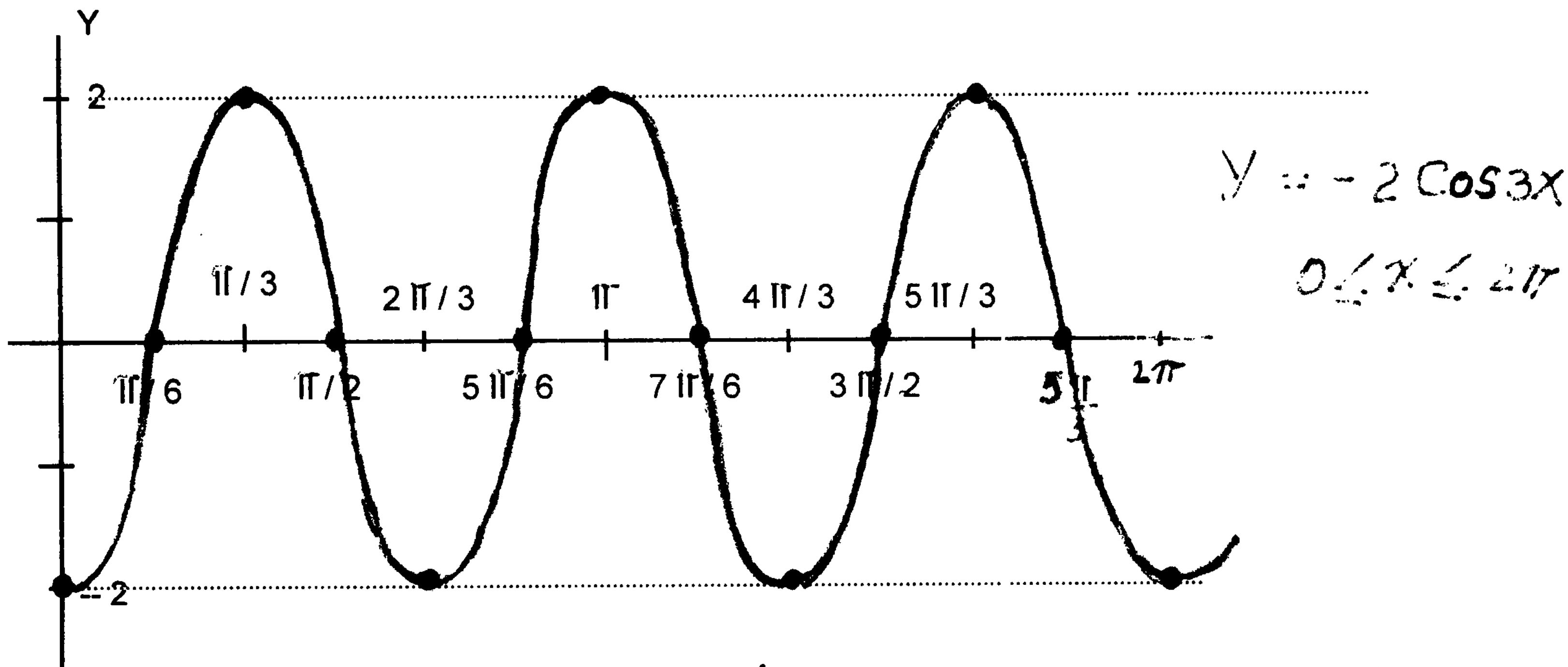
۲ــ در گراف ، Y قیمت 2 + میگیرد در صورتیکه $[X = 2(\pi/6)] = \pi/3$ · .... X = 2

۳ــ در گراف، Y قیمت صفر میگیرد در صورتیکه $X = 3(\pi/6) = \pi/2$ .... X = 3

٤ــ در گراف ، Y قیمت 2 -- میگیرد درصورتیکه $X = 4(\pi/6) = 2\pi/3$ · .... X = 4

به اساس تحلیل های فوق الذکر ، جدول ذیل را با گراف آن با دقت تام مطالعه نمأید :

X	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	π	$7\pi/6$	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$5\pi/3$	$11\pi/6$	2π
Y	-- 2	0	2	0	-- 2	0	2	0	-- 2	0	2	0	-- 2



مثال هشتم: گراف : $Y = \cos \pi X$ را در صورت سکیچ نمأید که $0 < X < \pi$ باشد ·

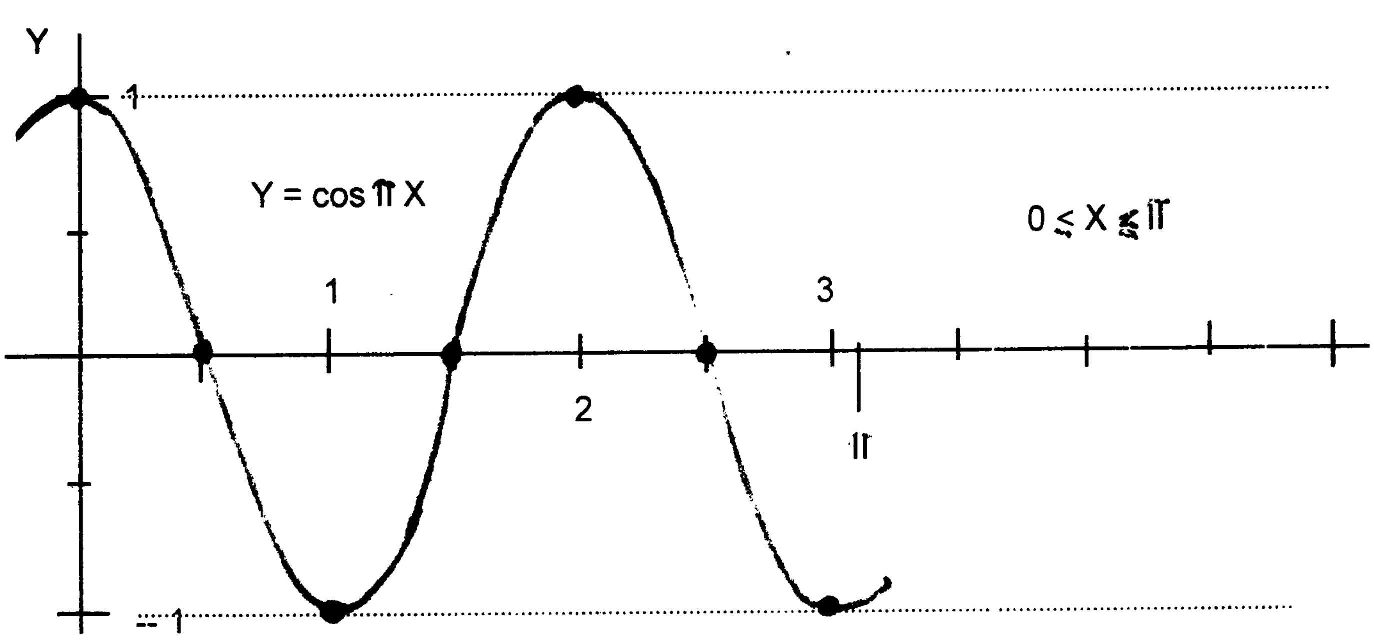
حل : ۱ــ قیمت اعظمی دامنه، $A = 1$ است ·

۲ــ قیمت پیریود گراف ، $T = 2\pi / B = 2\pi / \pi = 2$ است ·

۳ــ قیمت چارم حصهٔ پیریود ، $1/4\,(2) = 2$ است ·

چون قیمت پیریود این گراف از جنس π نیست ، پس جهت سکیچ کردن گراف آن به متحول X قیمت های اعشاری میدیهیم · که مطابق آن قیمت های متحول Y بدست میاید · جدول ذیل و گراف آنرا مطالعه فرمأید ·

X	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
Y	1	0	--1	0	1	0	-- 1



﴿ تمرین فصل چارم ﴾

۱ ـــ از تمرین (۱ الی ۲۰) ، پیریود های هر یك تابع را دریافت کرده ، بعداً گرافهای توابع را سکیج کنید ؟

1.	$Y = \sin 6X$	2.	$Y = 4 \sin 2X$	3.	$Y = 3 \cos 8X$	4.	$Y = \cos 10X$
5.	$Y = -2 \sin 12X$	6.	$Y = -\sin 5X$	7.	$Y = -\cos 16X$	8.	$Y = -4 \cos 2X$
9.	$Y = 5 \sin 2\pi X$	10.	$Y = 2 \sin 3\pi X$	11.	$Y = 3 \cos 4\pi X$	12.	$Y = Y = 4 \cos 10\pi X$
13.	$Y = 3 \sin (1/3) X$	14.	$Y = -2 \sin (2/5)X$	15.	$Y = -1/2 \cos (2/3) X$		
16.	$Y = 1/3 \cos (1/4)X$	17.	$Y = 0.4 \sin(2\pi X)/3$	18.	$Y = 1.5 \cos (\pi X)/10$		
19.	$Y = 3.3 \cos \pi X$	20.	$Y = 2.5 \sin (2X)/\pi$				

٤١ ـــ جریان برق در یك سرکت متناوب 60 Hz توسط معادلهٔ ذیل ارأیه گردیده است :

$i = 10 \sin 120 \pi t$ .... (1)

که i شدت جریان به واحد امپیر ، t وقت به ثانیه ٠

گراف i در مقابل t برای قیمت های ذیل سکیچ نمأید؟

$0 \leq t \leq 0.1$ sec

٤٢ ـــ ولتاژ که یك جنیریتور برق تولید میکند ، توسط معادلهٔ ذیل ارأیه گردیده است :

$v = 200 \cos 50 \pi t$ ....(2)

دراین معادله ، t به ثانیه است ٠

گراف v درمقابل t سکیچ نمأید ؟

٤٣ ـــ نوسان عمودی یك جسم که در آخیر یك عدد سپرینگ (فنر) اهتزاز میکند ٠ به معادلهٔ ذیل ارأیه شده است :

$X = 6 \cos 4 \pi t$ ....(3)

که درین معادله ، X بواحد انچ و t بواحد ثانیه اندازه میشود

گراف این معادله از قرار X درمقابل t در حدود ذیل رسم کنید ؟ $0 \leq t \leq 1$ sec

٤٤ ـــ سرعت پیستون یك انجن توسط معادلهٔ ذیل ارأیه گردیده است :

$V = 1200 \sin 1200 \pi t$ ....(4)

که V سرعت است به سانتی میتر فی ثانیه ، و t وقت به ثانیه ٠

گراف این معادله را رسم کنید که حدود تحول t چنین باشد ؟

$0 \leq t \leq 0.1$ sec

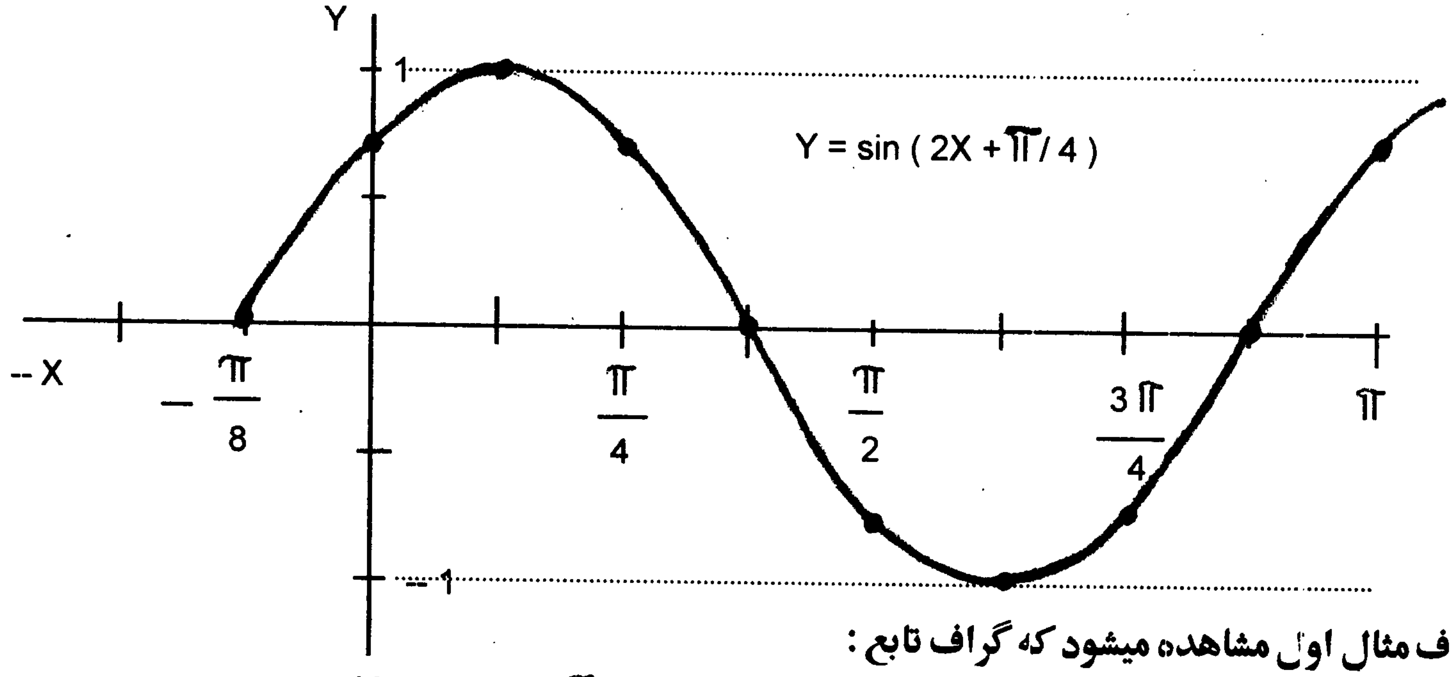
ترسیم گراف های $Y = A \sin (bX + c)$ و $Y = A \cos (bX + c)$:

موضوع بسیار مهم دیگر که باید در مورد توابع sin و cos مورد بحث قرار بگیرد ، عبارت است از زاویهٔ فاز (phase Angle) در تابع ، $Y = A \sin (bX + c)$ دیده میشود که c عبارت است از زاویهٔ فاز (Phase Angle) و مفهوم زاویهٔ فاز در ذیل توضیح میشود :

مثال اول : گراف $Y = \sin (2X + \pi/4)$ را رسم کنید ؟

دراینجاه ملاحظه میشود که $c = \pi/4$ است ، این به مفهوم است که نخست قیمت X را تخمینی تعین مینمأیم بعداً آنرا به عدد 2 ضرب کرده ، و $\pi/4$ را با آن جمع میکنیم ٠ سپس قیمت ساین آنرا از جدول دریافت مینمأیم ٠ که در نتیجه این پروسه ، جدول ذیل بدست می آید :

X	$-\pi/8$	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$	$5\pi/8$	$3\pi/4$	$7\pi/8$	π
Y	0	0.7	1	0.7	0	-- 0.7	-- 1	-- 0.7	0	0.7



از جدول و گراف مثال اول مشاهده میشود که گراف تابع :

$Y = \sin(2X + \pi/4)$ ....a

عیناً مانند گراف ، $Y = \sin 2X$ است ، صرف به تفاوت که گراف موصوف (این گراف) به اندازهٔ $\pi/8$ فاصله بطرف چپ به جلو افتاده است ۰ تأ ثیر اضافه شدن c در معادلهٔ : $Y = A \sin(BX + c)$ این است که گراف $Y = A \sin BX$ بطرف چپ (منفی) بالای محور X تناوب مینماید ۰ در صورتیکه $c > 0$ باشد ۰ و اگر کمیت ، $c < 0$ باشد ، یعنی c منفی باشد درآنصورت گراف بطرف راست تناوب مینماید ۰

همچنان ، مقدار تناوب بطرف چپ یا راست مربوط است به کمیت رابطهٔ $(-c/B)$ ۰ اینکه گراف چند واحد طرف چپ یا طرف راست تناوب می پذیرد ، مربوط است به مقدار $-c/B$ و قیمت همین نسبت را بنام تغیر مکان (displacement) یا (Phase shift) و یا به شکل خیلی علمی بنام تناوب فاز (phase shift) یا د میکنند ۰

اگر معلومات و تحلیل های فوق را جهت سکیچ کردن گرافهای توابع $Y = A \sin(BX + c)$ و $Y = A \cos(BX + c)$ خلاصه نمأیم ، آنهم در صورتیکه $b > 0$ باشد : به نتیجه گیری ذیل می رسیم :

۱ــــ مقدار دامنهٔ اعظمی Amplitude مساوی است به قیمت مطلقهٔ $\|A\|$ ۰
۲ــــ پیریود (T) Period مساوی است به $2\pi/\|B\|$ ۰
۳ــــ تناوب فاز (displacement) یا phase shift مساوی است به $-c/B$

با استفاده از کمیت های که در مراحل : (۱ ـ ۲ ـ ۳) فوقاً خلاصه گردیده ، و همچنان دریافت کردن 1 / 4 حصه فاصلهٔ پیریود ، به سهولت میتوانیم گراف های توابع ساین و کوساین را سکیچ نمأیم ۰

نمأ عمومی گراف $Y = A \sin(BX + c)$ در شکل (الف) ذیل بصورت واضح نشان داده شده است ۰
ملتفت باید بود که تناوب منفی (بطرف چپ) است ، اگر قیمت $c > 0$ باشد ۰ که این تغیر تناوب در شکل (الف) واضحتر ارأیه گردیده است ۰ همچنان بخاطر داشته باشید که تناوب مثبت (بطرف راست) است در صورتیکه $c < 0$ باشد ۰ که این موضوع در شکل (ب) ذیل خوبتر روشن گردیده است ۰

از طریق قضیهٔ فیتا گورین داریم :

قضیهٔ فیتا گورین ..... $r = \sqrt{(a)^2 + (b)^2} = \sqrt{(7.27)^2 + (4.49)^2} = 8.545$

حال قیمت های سه ضلع مثلث عبارت اند از : $(X = 7.27 , Y = 4.49 , r = 8.545)$

لهذاً. $\sin\theta = \frac{4.49}{8.545}$ ، $\cos\theta = \frac{7.27}{8.545}$ ، $\tan\theta = \frac{4.49}{7.27}$ ، $\cot\theta = \frac{7.27}{4.45}$ ، $\sec\theta = \frac{8.545}{7.27}$ ، $\csc\theta = \frac{8.545}{4.49}$

$\sin\theta = 0.525 \quad \cos\theta = 0.851 \quad \tan\theta = 0.618$

$\csc\theta = 1.90 \quad \sec\theta = 1.18 \quad \cot\theta = 1.62$

اگر یکی از توابع مثلثاتی را بدانیم ، میتوانیم سائر توابع را با استفادهٔ از قضیهٔ (فیتا گورین) دریافت نمایم ۰

مثا ل سوم : هر گاه $\sin\theta = 3 / 7$ بوده و زاویهٔ θ در ربع اول واقع باشد ، متبا قی توابع مثلثاتی این زاویه را دریافت نما ئید؟

حل : مطا بق شکل (۱۲ــ۱) ، میدانیم که $\sin\theta = Y / r$ است که درین صورت مطابق سوال قیمت های: $(Y = 3 , r = 7)$ میشود. لهذا میتوانیم قیمت (X) را با استفادهٔ قضیهٔ فیتا گورین پیدا کنیم :

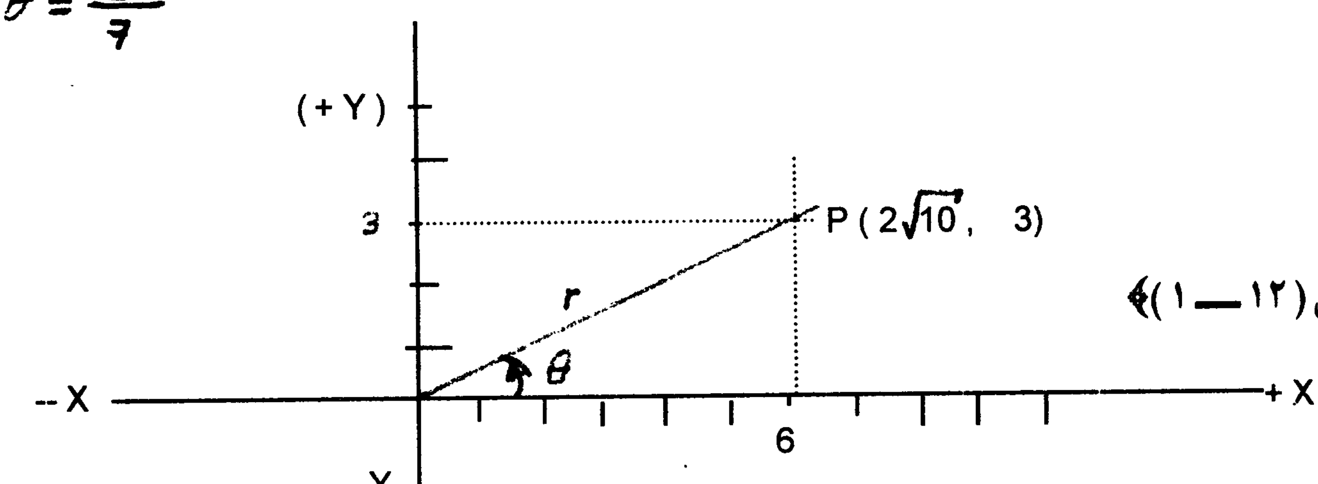
$(X = \sqrt{r^2 - Y^2} = \sqrt{7^2 - 3^2} = \sqrt{49 - 9} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10})$

لذاً وتر مثلث (r) از نقطهٔ $P (2\sqrt{10} , 3)$ عبور میکند ۰ شکل (۱۲ــ۱) ۰

توا بع مثلثاتی زاویهٔ (θ) قرار ذیل اند۰

جواب : $\cos\theta = 2\sqrt{10} / 7$, $\tan\theta = 3 / 2\sqrt{10}$, $\cot\theta = 2\sqrt{10} / 3$, $\sec\theta = 7 / 2\sqrt{10}$, $\csc\theta = 7/3$

$\sin\theta = \frac{3}{7}$



﴿ شکل (۱۲ــ۱) ﴾

استعمال کلکولیتر و کمپیوتر جهت دریافت کردن توابع مثلثات :

توابع مثلثات را میتوانیم از طریق(جد اول مثلثا تی) که اکثراً در کتب ریاضی ویا هم کتب مثلثات ملا حظه شده میتواند ، دریافت نمائیم ۰ به خاطر باید داشته باشیم که ما میتوانیم توابع مثلثات را ذریعهٔ کلکولیتر ها و کمپیوتر ها نیز به سهولت دریافت کرد ۰ نخست ما استعمال کلکولیتر را جهت دریافت توابع مثلثاتی تحت بحث قرار میدیهیم ۰ و بعداً استفاده از کمپیو تر در مورد دریافت کردن توابع مثلثاتی را دراخیر کتاب مرور مینمائیم ۰

۱ــ **کلکولیتر :** میخواهیم که فورمول ، $r = \sqrt{(7.27)^2 + (4.49)^2}$ را ذریعه کلکولیتر حل نمائیم ، مراحل که برای حل ایین فورمولا فوق ضروری است، قرار ذیل است:

عملیهٔ کلکولیتر ۰۰ $(7.27)\ \boxed{X^2}\ +\ 4.49\ \boxed{X^2}\ =\ \boxed{\sqrt{X}}\ =\ 8.545$

عدد (7.27) را در کلکولیتر ثبت مینمائیم ، بعداً تکمهٔ $\boxed{X^2}$ را فشا ر میدیهیم سپس علامهٔ جمع را ثبت میکنیم ۰

﴿ فصل پنجم ﴾

(مطابقت های مثلثاتی)

۱ـ مطابقت های مثلثاتی (۱۲۱)

۲ـ تمرین (۵ ـ ۱) (۱۲٤)

۳ـ ثبوت فورمول های، sin (A + B) , cos (A + B) (۱۲٦)

٤ـ تمرین (۲ ـ ۵) (۱۲۹)

۵ـ فورمول دوچند ـ زاویه (۱۳۰)

٦ـ تمرین (۳ ـ ۵) (۱۳۲)

۷ـ فورمول های نصف زاویه (۱۳۳)

۸ـ فورمول های حاصل ضرب و ضریب (۱۳٤)

۹ـ تمرین (۵ ـ ۵) (۱۳۵)

۱۰ سوالات فصل پنجم (۱۳٦)

۱۱ مثال های کمکی (۱۳٦)

ضمیمه ها

الف ـ جدول فورمول های عمومی ـــــ II---I (۱۳٦)

(ب) ـ فورمول های، مساحت، محیط، حجم، ومساحت سطحی ـــ III (۱٤۰)

(ج) ـ معلومات راجع به نظام شمسی ـــ IV (۱٤۱)

(د) ـ جوابات تمرین ها و سوالات عبارتی ـــ V (۱٤۲)

(ه) ـ جداول مثلثاتی و لوگارتم ـــ VI (   )

مثلثات

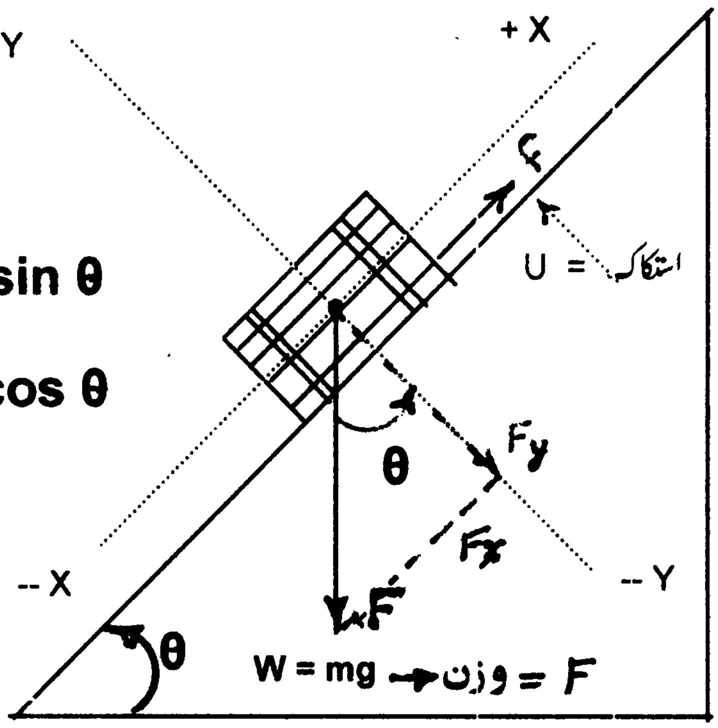
برای

صنوف ۹ ـ ۱۲

TRIGONOMETRY

$F_x = W \sin \theta$

$F_y = W \cos \theta$



تألیف و ترجمه : پوهنمل انجینر نظر محمد "کاریار"

سال ۱۳۷۹ هجری شمسی (August 2000)

﴿ پیشگفتار ﴾

این کتاب به حیث یك بخش مختص علم ریاضی ، (مثلثات) برای تدریس شاگردان مکاتب ثانوی و تخنیکی ویا شاگردان صنوف اول پوهنځیی های مسلکی وانجینری ترتیب وتدوین شده است ٠ در تهیه و ترتیب کتاب سعی بعمل آمده ، که علم مثلثات بحیث یك بخش بسیار مهم علوم ریاضیات معرفی شود ٠موضوعات اساسی ، تعریفات وفورمولهای مثلثات، گرافها ومسأیل عملی مندرجات این کتاب را تشکیل میدهد٠ تسلسل عناوین ، اساسات علم مثلثات و موضوعات کتاب طوری تریب وتدوین شده است که خوا ننده میتواند مباحث مثلثات را حتی بدون معلومات قبلی تعقیب نماید ٠ عناوین وموضوعات از ابتدأی (مبادی) آغاز گردیده و بالترتیب روبه سویهٔ بلندتر به تسلسل علمی و آموزشی ارتقأ مینمایند٠ این کتاب محتویات نساب تعلیمی (سیلیبس --- Sallybus) شاگردان صنوف نهم تابه صنوف دوازده هم مکاتب ثانوی را دربر دارد ٠ شاگردان میتوانند این کتاب را در سه صنف (٩ـ ١٠ـ ١١ـ ١٢) مضمون مثلثات مورد استفاده قرار داده ، تعقیب نمایند ٠

در این کتاب بعد از هر موضوعی تحت بحث ، تمرینات ، پرابلم های عملی و سوالات کافی محاسبوی گنجانیده شده تاشاگردان را در کارهای مسلکی ، ابتکاری ومهارتی بیشتر کمك کنند٠ در کتاب ، مفاهیم عمومی علم مثلثات به السنهٔ ملی کشور عزیز ما ، افغانستان تشریح گردیده که این شیوه خاص ، مطالعهٔ کتاب را دلچسپ و سهلتر میسازد ٠

از آن جاًیکه ، مثلثات جز نساب تعلیمی پروگرامهای تخنیکی و اینجینری میباشد ، بیشتر کوشش بعمل آمده است که پرابلم های عملی شامل تمرینات گردند٠ کتاب ، موضوعات عمومی مثلثات را بوجه خوبتر تسلسل آموزشی داده ، و برای خوانند، به شیوهٔ خاص ارأیه گردیده است ٠

در تهیه وترتیب کتاب از مأخذ های معتبر معاصر ومشهور سالهای (9--1990) استفاده شده است٠ استعمال کلکولیتر ساینسی در حل تمرین ها مورد استفاده قرار گرفته وهمچنان طرز استعمال آن نیز تشریح گردیده است ٠

توقع مؤلف اینست که ، خواننده محترم با مطالعهٔ معلومات ومهارتهای لازم در کتاب ، علم مثلثات را با آسانی فرأ گرفته و بتواند که مثلثات را در کسب مهارت های انجینری و تخنیکی به حیث یك وسیلهٔ موثر بکار ببرند٠

دراخیر کتاب ، بعضی ضمیمه های مفید، خلاصه و علاوه شده که شاگردان رابیشتر در حل پرابلم ها مجهز میسازند٠ جوابات تمام تمرین ها در اخیر کتاب حدالمقدور داده شده اند ٠ شاگردان میتوانند بعد از حل مسأیل محاسبوی با مراجعه به جوابات متیقین شوند که طروق محاسبات را صحیح تطبیق کرده اند و یا خیر؟

به امید صحت ، کامیابی بیشتر شما ! زنده ، آباد و آزاد باد افغانستان عزیز ،

انجینر نظر محمد کاریار

ریاضی : سوم

علم مثلثات

Trigonometry

برای مکاتب تخنیکی و ثانوی
دافغانستان

مؤلف : پوهنمل انجنیر نظر محمد کاریار

سال ۱۳۷۹ هجری شمسی و یا ۱۴۲۰ قمری (۲۰۰۰)

بسم الله الرحمن الرحيم

پوهنه رڼا ده

چو شمع از پی علم باید گداخت
که بی علم نتوان خدا را شناخت

علم مثلثات

ساینس ـ تیکنالوژی

ریاضی ـ مثلثات

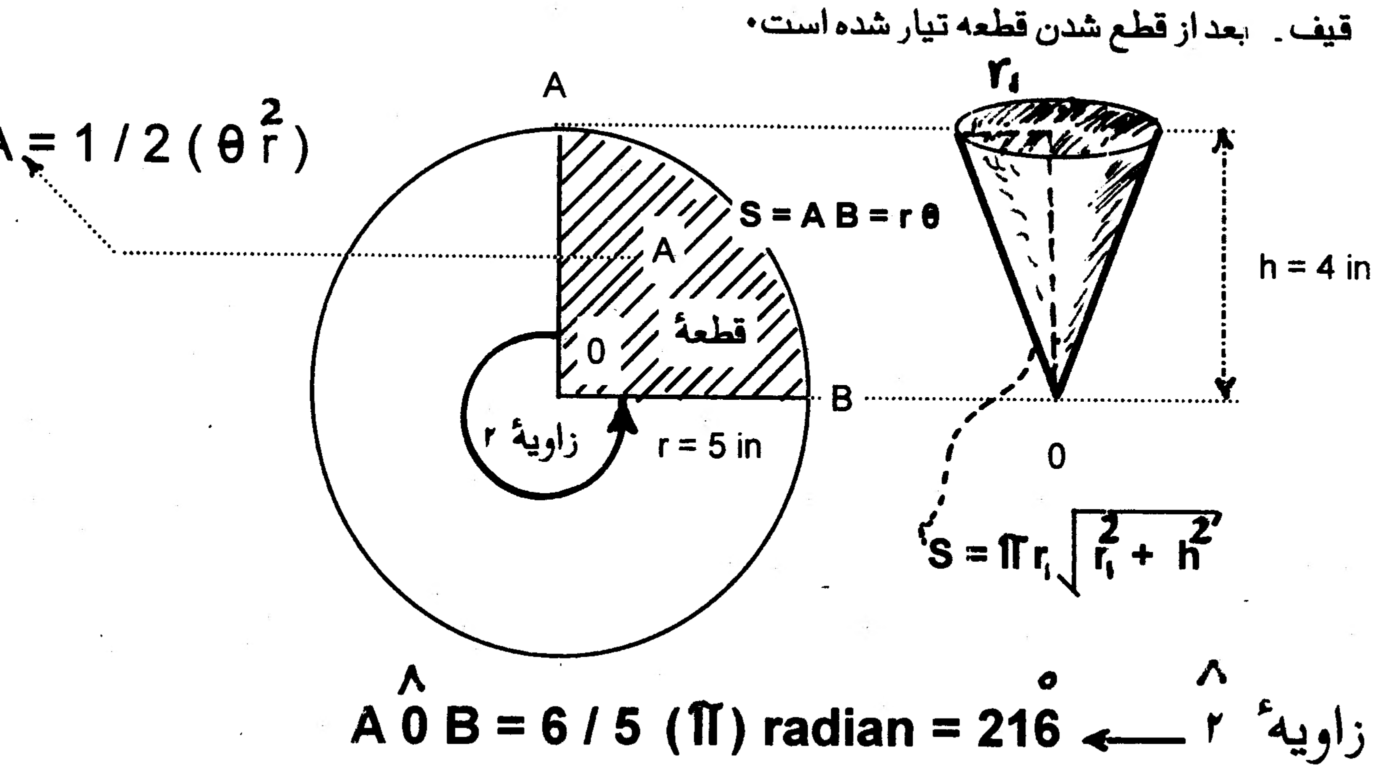
طبع دوم

سال ۱٤۲۰ هـ ق ـ ۱۳۷۹ هـ ش (مطابق 2000 عیسوی)

ریاضی : سوم

علم مثلثات

TRIGONOMETRY



تألیف و ترجمه : پوهنمل انجینر نظر محمد "کاریار"

قیمت فی جلد، درداخل افغانستان ۲۵۰ کلدار پاکستانی   تعداد چاپ: ۱۰۰۰

درخارج افغانستان ۳۰۰ کلدار پاکستانی

سال ۱۳۷۹ هجری شمسی (...st 2000

بسم الله الرحمن الرحیم

با عرض احترام !

خدای بزرگ (ج) را سپاس گذارم که بمن توفیق عنایت فرمود تا طبع دوم این کتاب درسی را آغاز نمایم ۰

چاپ کردن این کتاب دوم (طبع دوم مثلثات) در زنده گی هجرت وقتی مساعد گردید که من در پوهنتون کندهار به تدریس دوباره آغاز نمودم ۰ همهٔ ما درك مینمایم که عدم موجودیت کتب درسی ساینسی و تخنیکی به لسانهای ملی در پوهنتون های افغانستان بحیث یك معضله و مشکل بزرگ شاگردان و استادان محسوب میشوند ۰ البته ، همهٔ ما به این عقیده هستیم که موجودیت کتاب درسی ویا کتاب مأخذ در تدریس هر مضمون سهولت های فراوان را فراهم مینماید ۰ علمأ تعلیم و تربیه معتقد اند که: " تدریس عبارت از تجهیز کردن عملیهٔ آموزش است" یا بعبارهٔ دیگر، (Teaching is to facilitate learning) ۰

با احساس انکه ، از یك طرف عدم موجودیت کتب درسی در پوهنتون های افغانستان مشکل بزرگ محسوس میگردند ، و از طرف دیگر تکثیر کتب های علمی به لسانهای ملی یك سرمایهٔ ملی پنداشته میشود و باعث رشد فرهنگ جامعه میگردد ۰ من هم با وصف دسترسی با لوازم اندك ، به نوشتن این کتاب مبادرت ورزیدم ۰ ناگفته نماند که مؤلف ، با توجه اینکه تهیه کردن هر کتاب یك مقدار سرمایه را ضرورت دارد ، من هم این کتاب را به یك اقتصاد ضعیف در دورهٔ مهاجرت آغاز نمودم ۰ اینکه طبع این کتاب با صحافت امروزی تطابق نداشته ، یگانهٔ دلیل آن اقتصاد ضعیف مؤلف میباشد ۰

این کتاب ، نظر به کتاب اولی بیشتر جامع ووسعت دارد : که شامل پنج فصل درسی ، ضمایم : مجموعه فورمولها ، معلومات ساینسی ، جوابات تمام تمرین ها و جداول مثلثاتی را در بر دارد ۰ در تدوین این کتاب کوشش بعمل آمده است، که مثالهای زیادی جهت توضیح موضوع مورد بحث داده شوند ۰ همچنان جوابات تمام تمرین ها بحیث یك ضمیمهٔ جداگانه در محتویات این کتاب شامل گردیده است ۰ با داشتن تجارب چندین سالهٔ تدریس و توجه به عملیهٔ مؤثر آموزش ، در کتب تخنیکی وساینسی ، موجودیت جوابات تمرین ها و پرابلم های عملی شاگردان را بیشتر در بیشتر تشویق و تجهیز میگردانند ۰

باید خاطر نشان شود ، که تهیه نمودن کتب علمی وموضوعات ساینسی در خارج مؤسسات علمی کاری است بس مشکل - زیرا هر کتاب بحیث یك وسیلهٔ مهم واساسی افهام وتفهیم ، باید بتواند تا معلومات جمع شده را از مأخذ های معتبر ومعاشر بوجه خوبتر و آسانتر در خدمت خوانندٔ محترم بگذارد ۰ همچنان میدانیم که پروسهٔ افهام تفهیم یك معضلهٔ مغلق اجتماعی و مشکل است تا مطابق سویه ، احساس و هدف مندی فردی هر شخص ، مفاهیم تحریر شدهٔ را با فساحت ووضاحت کامل به رشتهٔ تحریر در آورد ۰ با همهٔ این مشکلات ، باید یاد آوری شود که این کتاب هم خالیگا ه های دارد ۰ و من از خواننده های محترم تمنا دارم تا تجارب خویش را در بیهبود این کتاب با ما شریك ساخته ، نظریات علمی ومفید را بمن بنویسند ، تا در طبع آینده همین کتاب اشتباهات تکرار نگردند ۰ و ما را درین کار خیلی ارزنده یاری رسانند ۰

ومن الله توفیق ۰

فهرست متن کتاب

فصل اول

(تابع مثلثاتی)

موضوع		صفحه
۱ـ	تعریف زاویه	(۱)
۲ـ	واحدات اندازه گیری زاویه	(۲)
۳ـ	اجزائ درجه	(۳)
٤ـ	تمرینات (۱ ـ ۱)	(٥)
٥ـ	تعریف توابع مثلثاتی	(٦)
٦ـ	استعمال کلکولیتر و کمپیوتر جهت دریافت کردن توابع مثلثاتی	(۹)
۷ـ	تمرینات (۲ ـ ۱)	(۱۰)
۸ـ	قیمت های توابع مثلثاتی	(۱۱)
۹ـ	عملیهٔ انترپولیشن خطی	(۱٤)
۱۰	تمرین های (۳ ـ ۱)	(۱٥)
۱۱	مثلث قایم الزاویه	(۱۷)
۱۲	تمرین (٤ ـ ۱)	(۱۹)
۱۳	سوالات مربوط به تطبیق مثلثات در ساحهٔ عملی	(۲۰)
۱٤	سوالات عبارتی	(۲۲)
۱٥	سوالات فصل اول	(۲٦)
۱٦	سوالات عبارتی فصل اول	(۲۷)

فصل دوم

(توابع مثلثاتی هر زاویه)

۱ـ	علامات توابع مثلثاتی	(۳۰)
۲ـ	تمرین (۲ ـ ۱)	(۳۲)
۳ـ	تمرینات فصل دوم (۲ ـ ۲)	(۳۸)
٤ـ	رادین	(٤۰)
٥ـ	استفاده از واحد رادین	(٤۷)
٦ـ	ثبوت مساحت سیکتور یك دایره	(٤۷)
۷ـ	سرعت زاویه وئ به اومیگاه	(٤۸)
۸ـ	تمرین (۳ ـ ۲)	(٥۰)
۹ـ	سوالات فصل دوم	(٥۳)

﴿ فصـل سـوم ﴾

(ویکتورها و مثلث های کیفی)

۱ـ	جمع ویکتور ها	(۵۷)
۲ـ	تمرین فصل سوم	(۵۹)
۳ـ	مرکبات اجزأی ویکتور ها	(٦۰)
٤ـ	تمرین (۲ ــ۳)	(٦۲)
۵ـ	جمع ویکتور ها از طریق مرکبات آنها	(٦۳)
٦ـ	طرزالعمل حل مثلثاتی ویکتور ها	(٦۵)
۷ـ	تمرین سوم	(٦٦)
۸ـ	تطبیق ویکتور ها	(٦۷)
۹ـ	سوالات عبارتی فصل سوم	(٦۸)
۱۰	قانون ساین	(۷۱)
۱۱	تمرین (۵ ــ ۳)	(۷۵)
۱۲	قانون کوساین	(۷۷)
۱۳	تمرین در جهت تطبیق قانون کوساین	(۸۰)
۱٤	سوالات عبارتی و عملی	(۸۲)
۱۵	فورمول "هیرون" ، جهت پیدا کردن مساحت مثلث	(۸٦)
۱٦	قانون " تنجنت"	(۸۷)

﴿ فصـل چارم ﴾

(گراف های توابع مثلثاتی)

۱ـ	رسم کردن گراف توابع ساین و کوساین ، Y = A cos X , Y = A sin X	(۹۱)
۲ـ	گراف های Y = A cos BX , Y = A sin BX	(۹٤)
۳ـ	تمرین فصل چارم	(۹۸)
٤ـ	رسم کردن گراف های ، Y = cos (bX + c) , Y = A sin (bX + c)	(۹۸)
۵ـ	تمرین عمومی فصل چارم	(۱۰۳)
٦ـ	گراف های (منحنی ها) مثلثات در علم فزیك	(۱۰۸)
۷ـ	حرکت هارمونیك	(۱۰۹)
۸ـ	سوالات	(۱۱۲)
۹ـ	گراف های مشترك توابع مثلثاتی	(۱۱۵)
۱۰	تمرین (٦ ــ ٤)	(۱۱۷)
۱۱	تمرین عمومی فصل چارم	(۱۱۸)